CAHIERS D'ENSEIGNEMENT

Les systèmes linéaires de dimension finie

Une introduction à l'algèbre linéaire

Michel Karatchentzeff

VERSION 2.0 — MAI 2003
FASCICULE I

Ce fascicule correspond à un cours donné de 1985 à 2001 à l'université Pierre et Marie Curie de Paris dans le cadre du Diplôme d'Études Approfondies d'Océanographie et de Météorologie.

Éditions successives

- version 1.0 année 2001
- version 2.0 année 2003

Copyright et Licence de diffusion

Michel Karatchentzeff © 2004

Ce document est publié en l'état et il est placé sous la *Free Documentation License*, version 2.0 ou ultérieure, dont la licence[†] se trouve à l'adresse :

`http ://www.gnu.org/copyleft/fdl.html`

La seule version de référence de ce document est celle du site :

`http ://MichelKaratchentzeff.free.fr`

et elle peut-être modifiée sans préavis.

[†] Dans les grandes lignes, ce document peut être librement redistribué et modifié, sans réserve, tant que cette licence ne change pas, mais l'original doit être cité ainsi que ses auteurs. De plus, il n'est apporté **aucune** garantie, d'aucune sorte et pour tout usage, quant aux conséquences d'une utilisation malheureuse du présent document, ce qui veut dire en particulier que rien ne peut être réclamé à l'auteur ou à ses collaborateurs, quel que soit le résultat obtenu en l'utilisant.

CHAPITRE 1

Langage et Méthodes

Après avoir montré pourquoi les théories utilisant les déterminants sont la plupart du temps inutilisables dans la résolution pratique des systèmes linéaires, on introduit le langage et l'esprit des techniques de résolution de ces derniers à partir de la méthode d'élimination de Gauss.

Commençons par une définition. On appelle système linéaire de m équations à n inconnues un système du type

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

où les a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ et les b_k $(k = 1, \ldots, m)$ sont des nombres réels connus et où les x_l $(l = 1, \ldots, n)$ sont des inconnues, réelles elles aussi. Le choix des nombres réels provient de l'un des buts de cet ouvrage (introduire des méthodes d'analyse numérique) et il sera facile de vérifier que la quasi totalité du contenu de ce livre s'applique aux nombres complexes.

Dans ce chapitre, on ne considérera que des systèmes de n équations à n inconnues.

1.1. Des méthodes ? Pourquoi ?

Ce paragraphe utilise quelques résultats simples de la théorie des déterminants et de son application à la résolution des systèmes linéaires. Ils seront rappelés et peuvent être admis sans crise de conscience puisqu'ils ne seront pas réutilisés par la suite.

L'une des méthodes les plus anciennes de résolutions des systèmes linéaires est due à Cramer. Elle date d'avant la Révolution de 1789 et s'écrit de façon très simple si l'on utilise la notion de déterminant. Illustrons-la sur l'exemple suivant :

Pour résoudre le système

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 5 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 3x - 8y + z &= 3 \end{aligned} \tag{2}$$

on calcule son déterminant principal

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 28$$

et comme ce dernier est non nul, la solution du système s'écrit de façon classique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{84}{28} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{28}{28} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -8 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{56}{28} = 2$$

Développons un peu la règle utilisée. Si l'on examine le système et le déterminant associé Δ (dit également déterminant principal), l'inconnue x est associée à la première colonne du déterminant, y à la seconde, z à la troisième. La théorie montre que le système a une unique solution en x, y et z puisque son déterminant principal est non nul. Pour obtenir la solution x, il suffit de remplacer dans le déterminant principal la colonne associée à x par la colonne construite sur le second membre seul, puis de diviser le résultat obtenu par la valeur du déterminant principal. On opère ensuite de même pour y et pour z, ce qui fournit les relations écrites ci-dessus. Il ne reste plus alors qu'à calculer les déterminants ainsi construits pour obtenir le résultat cherché.

C'est extrêmement simple et séduisant. Malheureusement, cela ne marche pas aussi facilement lorsque le calcul se fait sur des déterminants d'ordre élevé. La théorie montre qu'un déterminant d'ordre n peut se développer sous la forme d'une somme algébrique de produits

$$\sum_P \sigma(P) a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$$

Dans chaque terme de la somme, chacun des a_{ij} correspond à un seul élément pris sur une ligne (ou sur une colonne), chaque ligne (colonne) ne pouvant être utilisée qu'une fois par terme. Chaque terme comporte donc n éléments et est précédé d'un signe dépendant de la permutation des éléments choisis par rapport à la suite $(1, 2, \ldots, n)$. Et l'on somme sur toutes les combinaisons de termes de ce type.

Il est alors assez facile de voir que la somme ci-dessus comporte $n!$ termes et que chacun de ces termes se calcule par $n-1$ multiplications et donc qu'un déterminant $n \times n$ nécessite le calcul de $(n-1)(n!)$ multiplications.

Pourquoi parler de multiplications ? Parce que, en analyse numérique, on a coutume, pour évaluer la durée d'une série d'opérations de ne compter que les multiplications, la durée des additions étant supposée négligeable devant les premières.

Reste à se donner des ordres de grandeur des durées des multiplications. Nous admettrons alors que

- un homme, bon calculateur, peut faire une multiplication en 10 secondes,
- un micro ordinateur, première génération, fera la même opération en 0,016666 seconde,
- et qu'un ordinateur fera 2600 opérations par seconde.

Ces chiffres sont tout à fait critiquables (peu d'hommes sont capables de faire n'importe quelle multiplication en dix secondes, les ordinateurs calculent de plus en plus vite, les performances des "micros" se rapprochent de celles des "gros", etc.) et un lecteur "pinailleur" pourra aisément les actualiser ; il s'apercevra qu'en fin de compte, il arrivera à la même conclusion que celle à laquelle nous allons aboutir.

Prenant donc ces éléments pour base, évaluons le « temps de calcul » d'un déterminant 10×10 qui correspond à celui de 32 659 200 multiplications.

Le "bon calculateur" calculera alors pendant 326 592 000 secondes,
soit 90 720 heures,
soit 3 780 jours
soit environ 10 ans et 4 mois ;

le micro ordinateur mettra lui 544 320 secondes,
soit 151 heures 20,
soit près de 4 jours et demi ;

enfin le "gros" ordinateur mettra 12 561 secondes
soit près de 3 heures 30.

Et il ne s'agit que d'un déterminant 10×10. Bien des problèmes relèvent de déterminants d'ordre beaucoup plus élevés. Pour ne donner qu'un exemple, les équations d'équilibre chimique de l'atmosphère correspondent à plusieurs centaines d'équations à plusieurs centaines d'inconnues. Sans aller jusque là, évaluons le temps de calcul d'un déterminant 50×50. Le calcul de $50\,!$ n'est plus accessible que par la formule d'approximation de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \quad \text{(quand } n \text{ tend vers l'infini)}$$

qui donne, pour n=50

$$(n-1)(n!) = 49 \times 50! \approx 3 \times 10^{64} \qquad \text{multiplications}$$

Dans ces conditions, pour les effectuer

- le bon calculateur mettra 3×10^{65} secondes
  soit $8,43 \times 10^{61}$ heures,
  soit $3,51 \times 10^{60}$ jours,

soit $9,6 \times 10^{57}$ ans,
soit $9,6 \times 10^{55}$ siècles ;

– le micro ordinateur mettra $5,06 \times 10^{62}$ secondes
soit $1,40 \times 10^{59}$ heures,
soit $5,55 \times 10^{57}$ jours,
soit $1,60 \times 10^{55}$ ans,
soit $1,60 \times 10^{53}$ siècles ;

– et le calculateur mettra $1,16 \times 10^{61}$ secondes
soit $3,2 \times 10^{57}$ heures,
soit $1,35 \times 10^{56}$ jours,
soit $3,70 \times 10^{53}$ ans,
soit 4×10^{51} siècles ;

À ce stade, il est clair que la théorie des déterminants n'est pas d'un grand secours pour résoudre les systèmes linéaires, que les délais qu'elle implique pour les résoudre dépasseront largement, en général, la durée de vie du système solaire et que les calculateurs, aussi puissants soient-ils, n'apporteront aucune amélioration sensible au problème.

C'est un bon exemple d'une théorie parfaitement correcte du point de vue mathématique qui propose une méthode dont le concept est extrêmement simple, mais qui est inutilisable en pratique dans la plupart des cas.

Comme les scientifiques ont eu besoin de résoudre des systèmes bien avant que les ordinateurs n'existent, il leur a fallu trouver d'autres méthodes. Ce sont les principales d'entre elles que nous allons développer dans cet ouvrage.

Une fois celles-là connues, il sera toujours possible de s'aider de calculateurs pour les appliquer, mais il faut savoir que même si ces derniers permettent de pousser beaucoup plus loin certains calculs, ils introduisent des problèmes supplémentaires dont à un moment ou à un autre, il faudra bien tenir compte. Ce point ne sera esquissé que dans le dernier chapitre qui ne pourra servir que d'introduction à ces nouveaux types de problèmes.

Introduction de la méthode de Gauss.

On dira que deux systèmes d'équations linéaires sont équivalents *si l'on peut passer de l'un à l'autre par une combinaison linéaire des équations. La combinaison linéaire en question est alors dite* réversible *ou* inversible.

La méthode de Gauss est basée sur la notion d'élimination d'une variable. Le système est remplacé par un système équivalent dans lequel on a fait disparaître dans l'une des équations l'une des variables (*élimination*). En itérant ce procédé, on obtient, lorsque une solution existe,, un système dit triangulaire et qu'il est facile de résoudre.

Nous allons introduire cette méthode en l'appliquant à l'exemple (2) précédent. Soit donc à résoudre :

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 5 && \text{-}(1/2)^* \\ x - 2y + z &= 3 && (1)^* \\ 3x - 8y + z &= 3 && (0)^* \end{aligned}$$

où les notations suivantes ont été employées :

- en fin de ligne de chaque équation est inscrit le coefficient par lequel l'équation sera combinée linéairement avec les autres ;
- la nouvelle équation ainsi obtenue remplacera dans le système l'équation dont le coefficient de combinaison est 1.

Cette technique permet d'obtenir le système

$$\begin{array}{rrrrr} 2x + & 5y - & 3z = & 5 & \text{-(3/2)*} \\ -(9/2)y + & (5/2)z = & (1/2) & & (0)* \\ 3x - & 8y + & z = & 3 & (1)* \end{array}$$

Ce système est équivalent au précédent puisqu'il suffit de multiplier la première équation par 1/2, la seconde par 1 et la troisième par 0 d'additionner pour retrouver la seconde équation du système précédent. En continuant avec les mêmes conventions, on trouve successivement :

$$\begin{array}{rrrrr} 2x + & 5y - & 3z = & 5 & (0)* \\ -(9/2)y + & (5/2)z = & (1/2) & & \text{-(31/9)*} \\ -(31/2)y + & (11/2)z = & -(9/2) & & (1)* \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rrrr} 2x + & 5y - & 3z = & 5 \\ -(9/2)y + & (5/2)z = & (1/2) & \\ & -(56/18)z = & -(112/18) & \end{array}$$

Ce dernier système est dit triangulaire. Sa dernière équation ne comportant qu'une variable se résout aisément. En reportant le résultat dans l'équation précédente, on trouve y ; enfin, en reportant z et y dans la première, on obtient x. Soit :

$$z = 2\,; \quad y = 1\,; \quad x = 3$$

Remarques :

1. Nous avons supposé, et cela s'est avéré, toujours trouver un coefficient non nul dont l'inverse permettrait d'éliminer la variable correspondante dans les autres équations (le 2, coefficient de x pour les deux premières éliminations ; puis -(9/2), coefficient de y pour la dernière). Nous verrons que ce n'est pas toujours le cas. Lorsque ces coefficients existent, ils sont donc non nuls et on les appelle des *pivots*.
2. Nous avons choisi de toujours multiplier par 1 l'équation qui devait être transformée. Ce choix est évidemment arbitraire, mais nous verrons ultérieurement que ce choix permet de simplifier l'écriture de certaines opérations. C'est pourquoi il a été adopté.

La technique utilisée s'étend telle quelle à un système quelconque de n équations à n inconnues si toutefois on peut, pour chaque élimination, trouver un pivot. Dans le cas du système (1) ($m = n$), on aboutira à un système de la forme :

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ + c_{33}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_3 \\ \cdots &= \cdots \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned} \tag{3}$$

système triangulaire qu'il sera aisé de résoudre en partant à nouveau de la dernière équation.

Nombre d'opérations effectuées lors l'application de la méthode de Gauss.

Partons du système $n \times n$ (1) ($m = n$). Pour éliminer la variable x_1 dans la seconde ligne selon la méthode que nous venons de développer, il faut :

- 1 opération pour déterminer à partir du pivot le coefficient multiplicateur de la première équation ;
- n multiplications pour les coefficients restants de la même équation (les $n-1$ $a_{12}, \ldots, a_{1n}$ et b_1).

Pour transformer la deuxième équation, il faut donc $(n+1)$ opérations (on rappelle qu'on ne compte pas les additions dans la combinaison linéaire des deux premières équations).

Au total, on devra effectuer ce calcul sur les équations 2 à n, ce qui fera

$$(n+1)(n-1) = n^2 - 1 \qquad \text{opérations (multiplications)}$$

pour éliminer la variable x_1 des équations 2 à n.

Il n'y a plus qu'à recommencer la même procédure pour les équations 2 à n (c'est ce qu'on appelle la récursivité), c'est-à-dire éliminer la variable x_2 dans les équations 3 à n ; le même raisonnement donnera

$$(n-1)^2 - 1 \qquad \text{opérations (multiplications)}$$

En continuant le processus jusqu'à la dernière équation, on aura effectué au total

$$\begin{aligned} &\big(n^2 - 1\big) + \big((n-1)^2 - 1\big) + \cdots + \big((1)^2 - 1\big) \\ &= \big(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + (1)^2\big) - (1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} \qquad \text{opérations.} \end{aligned}$$

La résolution du système triangulaire correspond quant à elle à

1 opération pour résoudre la dernière équation,
2 opérations pour résoudre l'avant dernière,
...
n opérations pour résoudre la première équation,

soit $n(n+1)/2$ opérations. Au total, le nombre d'opérations pour résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss est de :

$$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3+3n^2-n}{3}\sim\frac{n^3}{3}\quad\text{lorsque } n \text{ est grand.}$$

Ce nombre est considérablement plus faible que celui obtenu par la théorie des déterminants. Si on considère à nouveau un système de 50 équations à 50 inconnues, sa résolution demandera 44 150 opérations, ce qui correspondra à un temps de calcul de,

- pour le calculateur (prodige), 441 500 secondes, soit un peu plus de 5 jours,
- pour le micro ordinateur, 735 secondes, soit un peu plus de 12 minutes,
- et pour l'ordinateur, près de 17 secondes,

ce qui est beaucoup mieux, et surtout, humainement accessible.

Remarque :

Il est possible de codifier un système linéaire autrement. Un système linéaire, le précédent par exemple, est parfaitement défini par un tableau à n lignes et $n+1$ colonnes, les n premières colonnes contenant les coefficients a_{ij} et la dernière les b_k, i, j, k variant dans ce cas de 1 à n.

Ce tableau pourra s'écrire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

ou plus symboliquement encore

$$\begin{pmatrix} \times & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

avec la convention que le '.' représente n'importe quel nombre, que '$\times$' est un nombre quelconque non nul et que les 'blancs' représentent des zéros.

Avec ces conventions, l'élimination par la méthode de Gauss de la variable x_1 transforme le tableau précédent en un tableau du type

$$\begin{pmatrix} \times & . & . & . & . \\ & . & . & . & . \\ & . & . & . & . \\ & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

la première ligne restant inchangée. Il est intéressant de constater qu'entre les deux tableaux qui conservent une ligne en commun, il y a exactement $n(n+1)-(n+1) = n^2-1$ nombres qui diffèrent ; on retrouve ainsi le nombre de multiplications nécessaires à l'élimination de x_1, ce qui donne un bon moyen mnémotechnique pour le retenir.

Introduction du formalisme des matrices.

Multiplication des matrices

Il est possible d'aller beaucoup plus loin que dans la remarque précédente et de récrire le système linéaire qui nous sert d'exemple sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Les tableaux ainsi définis s'appellent matrices ; le premier est dit 'matrice 3×3' (ou trois lignes trois colonnes), les deux suivants sont des matrices 3×1 (qui sont appelées le plus souvent 'matrices colonnes') On retrouve le système linéaire en 'multipliant' la matrice 3×3 par la matrice 3×1 selon la règle suivante :

- le produit a pour résultat une matrice colonne (compatibilité logique avec le membre de droite du système de matrices) ;
- l'élément de la première ligne de la matrice résultat s'obtient de la façon suivante : le premier élément de la première ligne de la matrice 3×3 est multiplié par l'élément de la première ligne de la matrice colonne ; on lui ajoute le produit du second élément de la première ligne par l'élément de la seconde ligne de la matrice colonne ; enfin on ajoute au tout le produit du troisième élément de la première ligne par l'élément de la troisième ligne de la matice colonne ;
- on recommence de la même façon en remplaçant la première ligne par la seconde pour obtenir l'élément de la seconde ligne de la matrice colonne résultat ; on fait évidemment de même pour la troisième ligne ;
- il ne reste plus qu'à identifier ligne à ligne les deux matrices colonnes pour retrouver le système linéaire.

Cette règle est plus longue à écrire qu'à comprendre ; elle est tout à fait évidente si on se donne la peine de regarder l'un à côté de l'autre le système d'équations et sa représentation sous forme de matrices. Elle s'étend évidemment aux systèmes de n équations à n inconnues et aux systèmes de m équations à n inconnues.

Il y a une autre direction, très intéressante, dans laquelle on peut étendre cette règle. Il suffit de remarquer que pour que le produit d'une matrice par une matrice colonne

ait un sens, il faut que la matrice possède autant de colonnes que la matrice colonne a de lignes. Mais c'est tout. Si l'on met 'côte à côte' plusieurs matrices colonne du même type, on obtient une matrice à laquelle on peut appliquer pour chaque colonne la règle ci-dessus. Le résultat obtenu sera le produit des deux matrices. Donnons un exemple pratique

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*2+5*3-3*1 & 2*6+5*4-3*2 \\ 1*2-2*3+1*1 & 1*6-2*4+1*2 \\ 3*2-8*3+1*1 & 3*6-8*4+1*2 \end{pmatrix}$$

Cette règle s'étend au produit de deux matrices quelconques pourvu que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de lignes de la seconde. Il est pratique pour l'exprimer d'utiliser des indices : au lieu d'écrire le tableau complet, comme dans le cas du système (1), il est convenu de se donner son terme général indexé par des indices *muets* (il est possible de changer leur nom sans que cela change quoique ce soit à la définition des termes) définissant sa position. Identifiant la matrice A et sa représentation, nous écrirons :

$$A = (a_{ij}) \qquad i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$$

Les indices sont bien muets : la signification de l'égalité ci-dessus n'est pas changée si on les remplaçait par k et l par exemple. Par contre les m et n ne sont pas muets, ce sont les dimensions du système (1). Enfin, par construction, i et j sont la ligne et la colonne de l'élément a_{ij}.

Si maintenant nous voulons multiplier la matrice A par une autre matrice B, le nombre de lignes de cette dernière devra être égal au nombre n de colonnes de A. Nous pourrons l'écrire par exemple

$$B = (a_{lk}) \qquad l = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, p$$

où p est un entier positif quelconque.

La règle de multiplication des matrices indique que le produit de la matrice A par la matrice B donne une matrice C ($C = AB$) d'ordre $m \times p$ définie par

$$C = (c_{ik}) \qquad i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, p$$

dont le terme général s'écrit

$$c_{ik} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qk} \tag{6}$$

Remarques

1. À partir du moment où l'on sait multiplier deux matrices, rien n'empêche d'en multiplier trois à condition que les égalités successives 'nombre de lignes = nombre de

colonnes' soient satisfaites. En utilisant la définition ci-dessus, il est facile de montrer que le produit de matrices est associatif, c'est-à-dire que

$$A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$$

toutes les fois que les produits successifs ont un sens.

2. Si le produit de matrices est associatif, il n'est en général pas commutatif. Et même, si le produit AB a un sens, BA n'en a pas. Pour qu'il en ait un, il faut que $m = n = p$ d'après la définition du produit, c'est-à-dire qu'il faut que les matrices soient carrées. Mais, en admettant même en ce cas, il est facile de vérifier qu'en général

$$AB \neq BA \quad \text{pour des matrices carrées}$$

3. Il existe cependant une matrice qui commute avec toutes les autres matrices carrées du même ordre, c'est la matrice identité I définie par [1]

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

les indices i et j variant de 1 à n (la matrice est une matrice carrée). Le lecteur pourra aisément vérifier que pour toute matrice A d'ordre $n \times n$, on a la relation

$$AI = I\,A = A$$

4. Une matrice B sera dite *inverse* d'une matrice A si et seulement si :
   - les deux matrices sont carrées et du même ordre ;
   - et si $AB = BA = I$.

On pose alors $B \equiv A^{-1}$.

5. Il existe une petite astuce technique pour ne pas se tromper lorsqu'on fait le produit de deux matrices et qui consiste à 'décaler' la seconde matrice ver le haut ; en utilisant l'exemple de tout à l'heure, cela s'écrit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2*2+5*3-3*1 & 2*6+5*4-3*2 \\ 1*2-2*3+1*1 & 1*6-2*4+1*2 \\ 3*2-8*3+1*1 & 3*6-8*4+1*2 \end{pmatrix} \end{array}$$

et se traduit par : la matrice de gauche multipliée par la matrice supérieur a pour résultat la matrice de droite. Cette façon de faire a l'avantage de mettre en évidence que, par exemple, l'élément (3,2) de la matrice produit s'obtient en combinant la troisième ligne

[1] Les matrices λI, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont les seules matrices qui commutent avec toutes les autres.

de la matrice de gauche par la deuxième colonne de la matrice supérieure. Elle montre également le pourquoi de la nécessité d'écrire les matrices colonne par colonne si l'on veut obtenir un résultat final 'lisible'.

Application à la méthode de Gauss

La mise sous forme de matrices peut être utilisée à chaque étape de la méthode de Gauss. Le système de notations qui en résulte possède certains avantages : clarté, les inconnues x, y, z sont regroupées et mises à part. Toute l'attention du calcul se porte sur la matrice et la forme est, nous le verrons, compatible avec les langages de programmation usuels, en particulier le fortran.

En transposant les résultats, nous obtenons successivement :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{7-a}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{7-b}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & -31/2 & 11/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} \tag{7-c}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -56/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -112/18 \end{pmatrix} \tag{7-d}$$

Le résultat de chaque étape de la méthode de Gauss étant exprimé de façon simple sous forme de matrices, le problème se pose de savoir s'il n'est pas possible d'utiliser les techniques du produit de matrices pour réaliser chaque étape.

La réponse est 'oui'. Le passage d'une étape à l'autre se fait en multipliant les matrices de l'étape précédente par une matrice bien déterminée.

Le second système ci-dessus s'obtient

- en conservant la première et la troisième équation ;
- en remplaçant la seconde équation par la combinaison linéaire

$$\left(-\frac{1}{2}\right) * \text{eq } 1 + (1) * \text{eq } 2 + (0) * \text{eq } 3$$

dont les coefficients sont ceux mis en évidence lors de l'introduction de la méthode de Gauss.

Donc, d'après les règles du produit de matrices, si nous multiplions à gauche le système de matrices initial par une matrice obtenue à partir de la matrice unité en remplaçant la seconde ligne par

$$-\frac{1}{2} \qquad 1 \qquad 0$$

soit

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on retrouve le second système de matrices. En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

soit après multiplication :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

qui est bien le second système (7-b). La matrice de passage E_{21} est dite *matrice élémentaire du premier type* (ses éléments diagonaux valent 1, et tous ses éléments non diagonaux sont nuls sauf un).

La troisième étape conserve les deux premières équations et remplace la troisième par la substitution

$$\left(-\frac{3}{2}\right) * \text{eq } 1 + (0) * \text{eq } 2 + (1) * \text{eq } 3$$

La matrice de passage qui lui correspond s'écrit donc

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il suffit de vérifier à nouveau que

$$E_{31} * \text{le système (7-b)}$$

redonne la troisième étape :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

soit, après calcul

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & -31/2 & 11/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

Enfin, la dernière étape s'obtient en remplaçant la troisième équation par

$$(-0) * \text{eq } 1 + \left(-\frac{31}{90}\right) * \text{eq } 2 + (1) * \text{eq } 3$$

ce qui définit la matrice élémentaire

$$E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -31/9 & 1 \end{pmatrix}$$

et à nouveau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -31/9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & -31/2 & 11/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -31/9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

redonne (7-d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -56/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -112/18 \end{pmatrix}$$

Si U est la matrice triangulaire supérieure ainsi obtenue, ce qui vient d'être fait peut s'écrire en particulier :

$$E_{32}\ E_{31}\ E_{21}\ A = \ U \tag{8}$$

Tout cela se généralise sans difficulté aux systèmes de n équations à n inconnues et la formulation ci-dessus qui permet d'introduire de façon formelle le produit de deux matrices, permet de récrire la méthode de Gauss toutes les fois que cette méthode est applicable.

Nous avons vu de plus que, lorsque, par une série de combinaisons réversibles, il était possible de mettre un système, donc une matrice, sous forme triangulaire, les éléments de la diagonale étant non nuls, le système d'équations linéaires associé était soluble.

Jusqu'ici, à bien regarder, nous n'avons fait que jouer avec des notations sans autre apport nouveau qu'une facilité d'écriture. Peut-on aller plus loin ? La réponse est oui. Nous allons voir progressivement qu'une simple réflexion sur ces méthodes met en évidence toutes les notions de l'algèbre linéaire.

Les premières conséquences de l'écriture sous forme de matrices.

- Résolution pratique d'un système linéaire.

La représentation par les matrices ci-dessus montre que

- les variable x, y, z sont 'traînées' d'un bout à l'autre du calcul sans autre utilité que de 'rappeler' qu'elles sont respectivement attachées aux première, seconde et troisième colonnes. Si nous 'mémorisons' cette convention, nous pouvons 'oublier' ces variables pendant le calcul et ne les faire 'resurgir' qu'à la fin.
- nous faisons exactement les mêmes opérations, et c'est bien normal, sur les lignes du membre de gauche que sur les lignes (à un élément) du membre de droite. Il est donc logique de 'regrouper' en une seule ces deux opérations.

Autrement dit, nous ne changerons rien à la résolution du système en le remplaçant par une matrice $n \times (n+1)$ dont les n premières colonnes sont les coefficients des inconnues

du système et dont la $n+1$-ème sont ceux du second membre. C'est tout simplement la notion que nous avions introduite dans (4).

Dans le cas de l'exemple que nous avons choisi, cette matrice s'écrira :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui est beaucoup plus simple. Le passage à la seconde étape se fera alors en multipliant à gauche cette matrice par la matrice E_{21}. C'est le même calcul qui redonne

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & -9/2 & 5/2 & 1/2 \\ 3 & -8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On obtiendra ensuite successivement en multipliant à gauche cette matrice par E_{31}, puis E_{32} les matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & -9/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -31/2 & 11/2 & -9/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & -9/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -56/18 & -112/18 \end{pmatrix}$$

La concentration d'écriture est grande ; elle augmente la lisibilité. C'est évidemment celle qui a été adoptée lorsqu'on faisait les calculs « à la main » [2] et c'est naturellement celle qui se transpose le plus facilement dans les langages de calcul évolués, comme le fortran [3].

Exercices :

– Écrire un sous-programme fortran qui applique la méthode de Gauss exposée ci-dessus. On supposera ne jamais rencontrer de pivot nul. Appliquer ce sous-programme à l'étude du système (2)

– Écrire un sous programme calculant les matrices élémentaires d'une matrice donnée. On supposera ne jamais rencontrer de pivot nul. Appliquer ce sous programme à l'étude du système (2)

- Inverses de matrices élémentaires et décomposition LU.

Nous allons utiliser la formule (8) pour exprimer la matrice A en fonction de la matrice U. Pour cela, il nous faut trouver les inverses de matrices E_{32}, E_{31}, E_{21}, ce qui est à priori un problème aussi difficile à résoudre que celui de trouver la matrice inverse de

[2] voir par exemple, L. Derwidué, *Introduction à l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique*, Masson Paris, Sciences et lettres Liège, 1957

[3] voir par exemple, Seymour Lipschutz et Arthur Poe, *Programmation fortran*, Série Schaum, Mc-Graw Hill, 1981

la matrice A. Mais comme chaque matrice a été déduite d'un principe de construction algébrique, il est logique de se demander si, en appliquant la construction inverse, nous n'obtiendrions pas, par la même règle, la matrice inverse.

Testons cette idée sur la matrice E_{32} qui fait passer du système

$$\left.\begin{array}{rrrrl} 2x + & 5y - & 3z = & 5 & (0)* \\ - & (9/2)y + & (5/2)z = & (1/2) & \text{-}(31/9)* \\ - & (31/2)y + & (11/2)z = & -(9/2) & (1)* \end{array}\right| \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & -31/2 & 11/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

au système

$$\left.\begin{array}{rrrr} 2x + & 5y - & 3z = & 5 \\ - & (9/2)y + & (5/2)z = & (1/2) \\ & & -(56/18)z = & -(112/18) \end{array}\right| \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -9/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -56/18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -112/18 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc maintenant de passer du second système au premier, ce qui s'obtient en remplaçant la troisième équation par

$$(0) * \text{eq } 1 + \left(\frac{31}{9}\right) * \text{eq } 2 + (1) * \text{eq } 3$$

En utilisant les notations définies précédemment, la matrice correspondante s'écrit :

$$E_{32}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 31/9 & 1 \end{pmatrix}$$

et il est facile de vérifier que :

$$E_{32}^{-1}\ E_{32} = E_{32}\ E_{32}^{-1} = I$$

Nous pourrions montrer de même que

$$E_{21}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad E_{32}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliée à gauche par les matrices inverses adéquates, la relation (8) peut s'écrire maintenant

$$A = E_{21}^{-1}\ E_{31}^{-1}\ E_{32}^{-1}\ U \equiv LU \tag{9}$$

(noter le renversement de l'ordre des matrices élémentaires) où nous avons défini

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 31/9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 31/9 & 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

L'inverse de la matrice L est déjà connu : c'est, d'après la définition de l'inverse, le produit des matrices $E_{32}\ E_{31}\ E_{21}$ qui vaut donc :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2/9 & -31/9 & 1 \end{pmatrix}$$

Les résultats de l'exemple qui vient d'être traité se généralisent aisément et nous les énoncerons sous la forme d'un théorème

THÉORÈME :

1. L'inverse d'une matrice élémentaire E de premier type s'obtient en changeant dans la matrice de E le seul élément non nul et non diagonal en son opposé.

2. Lorsqu'il existe, l'inverse d'un produit de matrices s'obtient en faisant le produit des inverses des matrices prises dans l'ordre inverse du produit initial

La démonstration de ces théorème se fera à partir des deux exercices suivant :

EXERCICE :

Une matrice élémentaire de type 1 a, rappelons-le, sur la i-ème ligne et la j-ème colonne un seul élément non nul x_{ij} hors de la diagonale ($i \neq j$), cette dernière étant composée de 1. Toute matrice élémentaire de type 1 peut donc se mettre sous la forme :

$$E = 1 + X$$

où X n'admet comme seul élément non nul que l'élément x_{ij} situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne avec la condition $i \neq j$.

Montrer que $X^2 = 0$ où $X^2 = XX$ et 0 est la matrice nulle. En déduire que $1 - X$ est l'inverse de E.

EXERCICE :

A et B sont deux matrices carrées de même ordre et inversibles. Montrer que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Étendre ce résultat à ABC.

Remarques et prolongements.

Les constatations qui suivent ne sont pas des démonstrations ; elles se généralisent cependant et les démonstrations sont laissées en exercice.

• Les matrices élémentaires que nous avons rencontrées sont toutes des *matrices triangulaires inférieures*, c'est-à-dire des matrices dont tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls. La somme et le produit de telles matrices conduit encore à une matrice triangulaire inférieure.

• Lorsqu'elle existe, la matrice inverse d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire inférieure.

• Dans la matrice L de la formule (10),
- l'élément 1/2 (deuxième ligne, première colonne) est, au signe près, le nombre par lequel nous avons multiplié la première équation avant de l'additionner à la seconde ;
- l'élément 3/2 (troisième ligne, première colonne) est au signe près le nombre par lequel nous avons multiplié la première équation avant de l'additionner à la troisième ;
- l'élément 31/9 (troisième ligne, deuxième colonne) est au signe près le nombre par lequel nous avons multiplié la seconde équation avant de l'additionner à la troisième.

Cette façon de construire directement la matrice L se généralise à tous les cas où la méthode de Gauss s'applique directement comme dans l'exemple présenté.

• Cette méthode de construction de la matrice L ne s'applique pas à son inverse comme le montre la matrice L^{-1} ci-dessus (élément de la troisième ligne, première colonne).

• La relation (9) fait apparaître la décomposition $A = LU$, sur laquelle nous reviendrons, en une matrice triangulaire inférieure (L pour *lower*) et une matrice triangulaire supérieure (U pour *upper*). Comme nous savons résoudre un système triangulaire (inférieur ou supérieur), un système linéaire quelconque $Ax = b$ dont la matrice obéit à une relation du type (9) sera aisément résoluble : il suffira de résoudre successivement

$$Ly = b \quad \text{puis} \quad Ux = y$$

pour avoir la solution x puisque

$$Ux = y \qquad \text{entraîne} \qquad LUx = Ly \quad \text{soit} \quad Ax = b$$

• Toute matrice à laquelle on peut appliquer la méthode de Gauss sans rencontrer un pivot nul se décompose sous la forme $A = LU$ où L et U ont les significations ci-dessus. La méthode de Gauss nous suggère donc l'existence d'une propriété des matrice, à savoir cette décomposition. C'est une avancée nouvelle sur les connaissances que nous avions et que nous allons développer par la suite.

Exercices :

– En utilisant la notion de matrice élémentaire, montrer les décompositions suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– Vérifier les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

La décomposition $A = LU$. Seconde approche.

Quand elle s'applique directement, la méthode de Gauss conduit à une décomposition du type $A = LU$. Nous allons retrouver, sous centaines réserves, ce résultat par un calcul direct.

Soit A une matrice $n \times n$ supposée connue, et L et U deux matrices du même ordre, la première triangulaire inférieure, la seconde triangulaire supérieure

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Si nous posons $A = (a_{ij})$, l'équation entre matrices

$$A = L\,U$$

équivaut au système d'équations

$$\begin{aligned} a_{1j} &= l_{11}u_{1j} && (1 \le j \le n) \\ a_{j1} &= l_{j1}u_{11} && (2 \le j \le n) \\ a_{2j} &= l_{21}u_{1j} + l_{22}u_{2j} && (2 \le j \le n) \\ a_{j2} &= l_{j1}u_{12} + l_{j2}u_{22} && (3 \le j \le n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{3j} &= l_{31}u_{1j} + l_{32}u_{2j} + l_{33}u_{3j} && (3 \le j \le n)\\
a_{j3} &= l_{j1}u_{13} + l_{j2}u_{23} + l_{j3}u_{33} && (4 \le j \le n)
\end{aligned}
$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
\begin{aligned}
a_{n-1,j} &= l_{n-1,1}u_{1,j} + l_{n-1,2}u_{2,j} + \cdots + l_{n-1,n-1}u_{n-1,j} && (n-1 \le j \le n)\\
a_{j,n-1} &= l_{j,1}u_{1,n-1} + l_{j,2}u_{2,n-1} + \cdots + l_{j,n-1}u_{n-1,n-1} && (j = n)
\end{aligned}
$$

$$a_{nn} = l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + \cdots + l_{nn}u_{nn}$$

Il suffit alors de remarquer que si on se donne l_{11} le premier système d'équations fournit la première ligne de U et le reste de la première colonne de L (l_{11} est déjà connu) si $u_{11} \neq 0$.

Ensuite la donnée de l_{22} permet de calculer les coefficient inconnus de la seconde ligne de U, puis ceux de la seconde colonne de L. Il n'y a plus qu'à continuer systématiquement selon le même principe.

En pratique, si nous choisissons $l_{ii} = 1$ pour tout i, le système se résout en

$$
\begin{aligned}
u_{1j} &= a_{1j} && (1 \le j \le n)\\
l_{j1} &= \frac{a_{j1}}{u_{11}} && (2 \le j \le n)\\
u_{2j} &= a_{2j} - l_{21}u_{1j} && (2 \le j \le n)\\
l_{j2} &= \frac{1}{u_{22}}\left[a_{j2} - l_{j1}u_{12}\right] && (3 \le j \le n)
\end{aligned}
$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
\begin{aligned}
u_{n-1,j} &= a_{n-1,j} - \textstyle\sum_{k=1}^{n-2} l_{n-1,k}u_{k,j} && (n-1 \le j \le n)\\
l_{j,n-1} &= \frac{1}{u_{n-1,n-1}}\left[a_{j,n-1} - \textstyle\sum_{k=1}^{n-2} l_{j,k}u_{k,n-1}\right] && (j = n)
\end{aligned}
$$

$$u_{nn} = a_{nn} - \textstyle\sum_{k=1}^{n} l_{nk}u_{kn}$$

pourvu que les u_{ii} calculés successivement soient non nuls.

En supposant cette condition vérifiée et en utilisant les remarques précédentes, la résolution d'un système linéaire

$$A\,x = b$$

se fait en trois étapes :

1. on calcule les matrice $L = (l_{ij})$ et $U = (u_{ij})$ de la décomposition $A = LU$;
2. on résout le système $Ly = b$:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{b_1}{l_{11}}\\
y_i &= \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}y_k\right] && (i = 2, n)
\end{aligned}
$$

3. enfin, on résout le système $Ux = y$:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} x_k \right] \qquad (i = n-1, 1)$$

REMARQUE :

Il est possible de 'symétriser' la décomposition en faisant apparaître également des 1 sur les diagonales des matrices L et U au prix d'une matrice diagonale supplémentaire. Si nous posons en effet

$$U = D\,V$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \frac{u_{13}}{u_{11}} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{u_{23}}{u_{22}} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La décomposition s'écrit alors

$$A = L\,D\,V$$

et sous cette forme, la nécessité des conditions u_{ii} non nuls apparaît nettement.

EXERCICE :

Dans la démonstration précédente, nous avons supposé que les l_{ii} valaient 1 dans le système initial. Refaire la démonstration en imposant aux u_{ii} de valoir 1. Indication : permuter pour commencer dans chaque sous système les groupes d'équations.

REMARQUE :

Une programmation pratique de méthode de calcul exposée ci-dessus permet, en tenant compte du fait que l'une des diagonales est composée de 1 de regrouper les matrices L et U en un seul tableau de n^2 nombres.

EXERCICES :

- en supposant les pivots non nuls, montrer que l'on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (ad-bc)/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Démontrer l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- En déduire la solution du système

$$A\,x = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Matrices singulières, matrices régulières et décomposition LU.

Reprenons la méthode de Gauss. Elle n'est possible, et dans ce cas elle entraîne, comme nous l'avons vu, la décomposition $A = LU$, que si aucun des pivots rencontrés n'est nul. Que doit-on faire dans le cas contraire ? Deux cas seulement peuvent se produire :

- ou il existe dans la colonne du pivot nul, et sous ce dernier, un terme non nul : on échange alors dans ce cas les équations (ou les lignes) correspondantes et l'on poursuit la triangulation ;
- ou tous les termes sous le pivot et dans la colonne de celui-ci sont nuls, et la méthode ne peut se poursuivre.

Définitions :

Si à partir d'un certain rang au cours d'une triangulation par la méthode de Gauss, le pivot apparaissant est nul pour toute permutation de ligne qui le suivent, la matrice correspondante est dite singulière *; dans le cas contraire, la matrice est dite* régulière.

Le fait de permuter deux équations d'un système ne change rien à sa solution puisque l'ordre dans lequel on considère les équations n'intervient pas. Si le système est écrit sous forme de matrices, le résultat correspondant est celui d'un permutation des lignes de la matrice du système et de celle du second membre. Il est alors légitime de se demander, dans le même esprit que celui qui a présidé à l'introduction des matrices élémentaires du premier type si l'opération de permutation de lignes peut se transposer dans le langage des matrices.

La réponse est oui, et il est facile de voir que permuter les lignes i et j d'une matrice donnée revient à la multiplier à gauche par une matrice identité de même rang et dont on a également permuté les lignes i et j. Cette matrice est alors dite *matrice élémentaire du second type.*

Mais *a priori*, le produit de matrices élémentaires des deux types ne donnera plus de matrice triangulaire inférieure. La formulation $A = LU$ n'est donc pas la plus générale qui soit et nous pourrons l'étendre en remarquant que les différentes opérations effectuées en appliquant la méthode de Gauss produisent le même résultat quelque soient les permutations effectuées sur le système initial, puisque l'ordre dans lequel les équations sont considérées n'intervient pas.

Nous pouvons tout d'abord procéder en deux étapes : une première au cours de laquelle, durant le calcul, les permutations effectuées sont repérées. Ces permutations permettent de construire une matrice P qui permet d'affirmer que la matrice PA pourra être traitée par la méthode de Gauss sans rencontrer un pivot nul. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME :

Soit A une matrice régulière ; alors, il existe une matrice P de permutation des lignes telle que PA admette une décomposition LU

$$PA = LU$$

REMARQUE :

En réalité, pour trouver la formule ci-dessus, il n'y a pas besoin de revenir en arrière. Lorsqu'à un moment donné une permutation s'avise nécessaire, la matrice élémentaire qui lui correspond n'intervient que dans les lignes suivantes et ne modifie rien dans les opérations qui ont précédé ; elle commute donc avec ces dernières, ce qui permet de retrouver le résultat énoncé

EXERCICES :

- Résoudre, en permutant au besoin les équations, le système [4]

$$\begin{aligned} u + 4v + 2w &= -2 \\ -2u - 8v + 3w &= 32 \\ v + w &= 1 \end{aligned}$$

- Trouver les matrices P, L, U dans la décomposition $PA = LU$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Trouver les matrices P, L, D, V dans la décomposition $PA = LDV$ de la matrice [5]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

[4] Indication : $u = 2$, $v = -3$, $w = 4$, échange des lignes 2 et 3.

[5] Indication :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = I \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Que peut-on dire des systèmes suivants [6]

$$\begin{aligned} v - 2w &= 2 \\ u - v \quad &= 2 \\ u \quad - \quad w &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v - 2w &= 0 \\ u - v \quad &= 0 \\ u \quad - \quad w &= 0 \end{aligned}$$

---

[6] Indication : les deux systèmes sont singuliers ; le premier n'a pas de solution ; le second : $u = v = w =$ n'importe quoi.

CHAPITRE 2

Notion d'espace vectoriel, premières propriétés

Synthèse des propriétés des matrices élémentaires

Nous avons vu jusqu'ici qu'il était possible de *réduire* une matrice régulière associée à un système linéaire

- soit en effectuant des combinaisons linéaires de ses lignes ;
- soit, ce qui est équivalent, en la multipliant par des matrices élémentaires.

Le premier type de matrice élémentaire correspondant au remplacement de la ligne i d'une matrice $n \times n$ par la somme de cette ligne et de α fois la ligne j s'obtient en remplaçant par α l'élément situé à la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice unité de même dimensions. Cette matrice sera notée symboliquement :

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & \alpha & & 1 & & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où α est à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, tous les autres éléments non-diagonaux étant nuls.

Cette matrice s'inverse aisément et son inverse s'obtient en remplaçant α par $-\alpha$ dans la matrice ci-dessus.

Nous avons cependant vu que l'utilisation de ce type de matrice n'était pas suffisante pour obtenir dans tous les cas à partir d'une matrice régulière une matrice triangulaire et qu'il fallait lui adjoindre un autre type de matrice permutant les lignes i et j d'une matrice donnée. Une telle matrice s'obtient en permutant dans la matrice identité les lignes i et j ; elle est alors sa propre inverse puisqu'effectuer deux fois une telle permutation redonne la matrice initiale.

Enfin, en présentant la méthode de Gauss-Jordan, nous avons introduit un troisième type de matrice élémentaire, celle permettant de multiplier par α la i-ème ligne d'une

matrice donnée : ce n'est autre que la matrice identité dans laquelle le i-ème élément diagonal est remplacé par α :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est évidemment inversible si $\alpha \neq 0$ et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/\alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Généralisation des résultats obtenus aux matrices rectangulaires.

Tout ce qui a été fait jusqu'ici ne concerne que les lignes. Il est donc possible de généraliser les résultats obtenus aux matrices rectangulaires, puisque le nombre de colonnes n'intervient pas dans les opérations effectuées.

Considérons la matrice 3×4 de cette manière

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le premier pivot (a_{11}) n'est pas nul et il est aisé de faire apparaître des zéros sous le 1 dans la première colonne ; ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Le second pivot est nul, et toute permutation de ligne ne fait apparaître que des pivots nuls (la matrice serait carrée, elle serait singulière).

Comme l'élément (2,2) est nul, poursuivons l'élimination sur la colonne suivante. En soustrayant deux fois la seconde ligne de la troisième, nous obtenons :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue ressemble à une matrice triangulaire même si ce qualificatif est inadéquat. Il est alors aisé de vérifier que pour obtenir la seconde ligne, il suffit de multiplier à gauche la matrice A par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$E_1 = A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La troisième ligne s'obtient en multipliant le résultat ci-dessus par :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne en effet :

$$E_2 E_1 = A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Et le résultat de la dernière transformation s'obtient en multipliant par

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

le résultat précédent pour donner

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Dans l'exemple ci-dessus, il n'y a pas eu besoin d'utiliser des matrices de permutation, mais cela aurait très bien pu se faire. Il est également possible d'aller plus loin dans la transformation de la matrice initiale pour n'obtenir que des 1 comme pivots et des zéros pour tous les autres éléments de leur colonne (comme dans la méthode de Gauss-Jordan). Par exemple, en multipliant à gauche U par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice U se transforme en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier la seconde ligne par 3 avant de la retrancher de la première pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne étant composée de zéros, le processus ne peut aller plus loin.

DÉFINITIONS :

Tout ce qui vient d'être dit justifie l'introduction des définitions suivantes :

– On appelle *entrée d'une ligne*, s'il existe, le premier élément non nul.

– On appelle *matrice échelon* ou *matrice en escalier* toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} * & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & * & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & * & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que :

- les lignes non nulles viennent d'abord (autrement, il aurait fallu faire un échange de lignes ;
- les entrées (notées $*$) sont les premiers éléments non nuls de chaque ligne ;
- en dessous de chaque entrée, il y a une colonne de zéros ;
- chaque entrée se trouve à la droite de l'entrée de la ligne précédente ;
  Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– On appelle *matrice réduite en ligne*, toute matrice telle que

a) dans une ligne non nulle, l'entrée vaut 1 ;

b) tous les autres éléments de la colonne associée à cette entrée sont nuls.
Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 1 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 1 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & 0 & b_{14} & 0 & b_{16} \\ 0 & 0 & 1 & b_{24} & 0 & b_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– On appelle *matrice échelon réduite* , toute matrice
  a) réduite en ligne,
  b) dont les lignes nulles apparaissent au dessous des lignes non nulles,
  c) et telle que si t_i est la colonne de la i-ème entrée, alors

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_r$$

Exemples : Le première et la troisième matrice de l'exemple précédent sont de ce type. La seconde ne l'est pas, mais peut s'y mettre quand après plusieurs permutations, la première ligne aura été placée en troisième ligne.

THÉORÈME :

Toute matrice est équivalente à une matrice réduite.

.

Tout se généralise dans le théorème :

THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION :

À toute une matrice A d'ordre $m \times n$ correspond une matrice de permutation P d'ordre $m \times m$, une matrice triangulaire inférieure L d'ordre $m \times m$ et une matrice échelon U d'ordre $m \times n$ telles que :

$$PA = LU$$

La notion d'espace ligne.

PROBLÈME :

Étant donné une ligne d'une matrice quelconque, par combinaison linéaire quelconque, par combinaison linéaire des autres lignes, quelles sont les différentes « formes » qu'elle peut prendre ?

Cet ensemble de « formes » sera appelé espace ligne de A, noté $\mathcal{L}(A)$ [7], et ce sont ses propriétés que nous allons étudier maintenant.

Commençons par essayer de formaliser tout cela. Si A est une matrice $m \times n$ (m lignes, n colonnes), nous noterons de manière équivalente

$$u_k \equiv (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$$

sa k-ème ligne. La première notation est formelle, la seconde assimile une ligne à une matrice $1 \times n$.

[7] Note à l'attention d'un lecteur averti qui survolerait ce texte : l'espace ligne $\mathcal{L}(A)$ **n'est pas** l'espace image de A que nous étudierons plus loin ; c'est en réalité l'espace image de la transposée de A, $\mathcal{I}m(A^t)$, comme nous le montrerons.

Avec ces notations, $\mathcal{L}(A)$ peut se définir comme

$$\mathcal{L}(A) = \Big\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (a_{k1}, \ldots, a_{kn}) \;\Big|\; \text{pour tous les ensembles possibles } (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \Big\}$$

Un élément de $\mathcal{L}(A)$ est donc du type

$$(c_{k1}, \ldots, c_{kn})$$

PROPRIÉTÉS :

Sur $\mathcal{L}(A)$, on induit des opérations à partir de celles que l'on peut effectuer sur les lignes. Par exemple, si

$$u_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn}) \quad \text{et} \quad u_l = (a_{l1}, \ldots, a_{ln})$$

la somme de deux lignes sera obtenue par

$$u_k + u_l = (a_{k1} + a_{l1}, \ldots, a_{kn} + a_{ln})$$

où le '+' du membre de gauche est celui de la définition de l'addition dans $\mathcal{L}(A)$, ceux du membre de droite correspondent à l'addition dans $\mathbb{R}$. De même, le produit d'une ligne par un nombre réel sera défini par :

$$\lambda u_k \equiv (\lambda a_{k1}, \ldots, \lambda a_{kn})$$

Comme tout élément de $\mathcal{L}(A)$ s'écrit comme une combinaison linéaire (finie) de lignes de ce type, la somme de deux éléments de $\mathcal{L}(A)$ (ou le produit par une constante d'un élément de $\mathcal{L}(A)$) est encore une combinaison linéaire de lignes du type ci-dessus.

Soient en effet, v et w deux éléments de $\mathcal{L}(A)$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k \; ; \qquad w = \sum_{k=1}^{m} \mu_k u_k$$

il suffit de développer la définition ci-dessus pour constater que :

$$v + w = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k + \sum_{k=1}^{m} \mu_k u_k = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k + \mu_k) u_k$$

et donc que $v + w$ est du même type. Il est alors aisé d'en déduire que :

1. si $u \in \mathcal{L}(A)$, $v \in \mathcal{L}(A)$, $w \in \mathcal{L}(A)$, nous venons de vérifier que $u + v$ et $v + w$ appartenaient à $\mathcal{L}(A)$. De plus

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

(la loi d'addition est alors dite associative)

2. $0 \equiv (0, \ldots, 0)$ appartient à $\mathcal{L}(A)$ comme combinaison nulle des lignes (0 est dit élément neutre de la loi).
3. si u appartient à $\mathcal{L}(A)$, il en est de même de $-u$ car $\lambda u \in \mathcal{L}(A)$ avec $\lambda = -1$ (c'est l'élément opposé de u)
4. enfin, si u et v appartiennent à $\mathcal{L}(A)$, alors

$$u + v = v + u$$

(c'est la commutativité de l'addition).

$\mathcal{L}(A)$ est dit posséder une structure de *groupe abélien* pour l'addition définie ci-dessus.

Dans $\mathcal{L}(A)$, la multiplication par un nombre réel possède également les propriétés suivantes pour tout u et v de $\mathcal{L}(A)$ et tout λ et μ de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(u+v) &= \lambda u + \lambda v \\ (\lambda+\mu)v &= \lambda u + \mu u \\ (\lambda\mu)u &= \lambda(\mu u) \\ 1u &= u \end{aligned}$$

Toutes ces relations se vérifient également à partir des définitions ci-dessus. On dit alors que ces propriétés confèrent à $\mathcal{L}(A)$ une structure d'*espace vectoriel* et ce sont les propriétés de cette structure que nous allons maintenant développer.

Espace vectoriel.

Il est possible de généraliser les propriétés que nous venons de mettre en évidence à d'autre ensembles que celui des lignes d'une matrice ; nous obtenons alors la notion d'espace vectoriel. Avant de la définir, rappelons quelques concepts :

- Un groupe est un couple $(G, G \times G \longrightarrow G)$ formé d'un ensemble G et d'une loi de composition associative, possédant un élément neutre et telle que tout élément admet un opposé.
- Un anneau est un tripplet $(K, +, *)$ où $(K, +)$ est un groupe abélien et où la multiplication $*$ est associative, admet un élément unité et telle que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- Un corps est un anneau unitaire dont tout élément non nul est inversible.

Ces termes de vocabulaires étant rappelés

DÉFINITION :

Un espace vectoriel sur un corps K est, par définition, le couple

$$(E\,,\, K \times E \longrightarrow E)$$

où E est un groupe (abélien),
$K \times E \longrightarrow E$ est une application ayant les propriétés suivantes pour tout x, y appartenant à E et tout λ, μ appartenant à K :

(a) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
(b) $(\lambda+\mu)v = \lambda u + \mu u$
(c) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
(d) $1u = u$

REMARQUES :

- Dans la définition de l'espace vectoriel, l'inverse n'est pas utilisé ; si l'on reprend les mêmes critères en choisissant pour K un anneau unitaire, on obtient la définition d'un *module*.
- Les propriétés (a), (b), (c), (d) entraînent que la loi de groupe est commutative. Il suffit, pour le démontrer, de développer de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}(1+1)(x+y) &= 1(x+y) + 1(x+y) = x+y+x+y \\ &= (1+1)x + (1+1)y = x+x+y+y\end{aligned}$$

d'où $y+x = x+y$.
Mais la commutativité n'entraîne pas (d). Il est aisé de vérifier que $\mathbb{R}^2$ est un groupe abélien pour l'addition. Mais si la multiplication scalaire est définie par

$$\lambda(x,y) \equiv (\lambda x, 0)$$

cette loi vérifie les propriétés (a), (b), (c) mais elle ne vérifie pas (d).

- Les propriétés précédentes montrent que

$$0x = 0$$

Le premier 0 est un scalaire, le second l'élément neutre du groupe. Nous pouvons en effet écrire successivement

$$\begin{aligned}0x + 1x &= (0+1)x = 1x \\ 0x + x &= x \\ 0x &= 0\end{aligned}$$

Mais la démonstration

$$1x + (-1)x = (1-1)x = x - x = 0$$

est fausse car si 1 est l'élément unité, (-1) n'est pas connu ; il faudrait démontrer auparavant que $(-1)x = -x$. Cette propriété résulte de

$$\lambda 0 = 0$$

(en effet $\lambda 0 = \lambda(x-x) = \lambda x - \lambda x = 0$ où il suffit de faire $\lambda = 1$

EXEMPLES D'ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$:

Dans les exemples qui suivent, il est élémentaire de montrer que les ensembles en question satisfont à la définition d'un espace vectoriel. Cette vérification est donc laissée au lecteur.

- Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; ce sont des espaces vectoriels sur eux-mêmes. L'addition usuelle sert de loi de groupe et la multiplication usuelle s'interprète comme une multiplication scalaire.
- L'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ avec pour addition

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pour tout x de $[a, b]$, et pour multiplication scalaire

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

pour tout x de $[a, b]$ et tout λ de $\mathbb{R}$.
- Plus généralement, l'exemple précédent introduit la notion de structure d'espace vectoriel induite, notion très puissante pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Soit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F où E est un ensemble quelconque et F un espace vectoriel sur un corps donné. On induit sur $\mathcal{F}(E, F)$ une structure d'espace vectoriel sur le même corps que celui de F par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pour tout x de E, et pour multiplication scalaire

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

pour tout x de E et tout λ du corps associé à F.

Bien noter que, dans la définition, le $+$ du membre de gauche (celui de $(f+g)$) correspond à l'addition dans $\mathcal{F}(E, F)$, et que le second (celui du membre de droite $f(x) + g(x)$) correspond à l'addition dans F.

Toutes les propriétés de définition d'un espace vectoriel sont satisfaites puisque F les possède. Par exemple, l'associativité se vérifie par

$$\begin{aligned}
\Big((f + g) + h\Big)(x) &= \Big(f(x) + g(x)\Big) + h(x) && \text{(définition de l'addition)} \\
&= f(x) + \Big(g(x) + h(x)\Big) && \text{(l'associativité est vraie pour } F\text{)} \\
&= \Big(f + (g + h)\Big)(x) && \text{(définition de l'addition)}
\end{aligned}$$

- L'ensemble des matrices $m \times n$ muni des lois d'addition et de multiplication scalaire que nous avons établies précédemment.
- Le produit cartésien $E \times F$ de deux espaces vectoriel E et F. Si nous posons

$$z = (x, y) \quad \text{et} \quad z' = (x', y')$$

les lois définies par

$$z + z' = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$

en font un espace vectoriel. Ces lois ne sont que l'extension à des espaces vectoriels quelconques de la *règle du parallélogramme* et en les généralisant, il est facile de montrer que $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$ sont également des espaces vectoriels.

- L'ensemble des suites munies de leurs lois d'addition et de multiplication (qui ne sont qu'une extension des lois de l'exemple précédent).
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.

La notion de sous-espace vectoriel.

Revenons à $\mathcal{L}(A)$, l'ensemble des combinaisons linéaires des lignes de la matrice A, et un élément de cet ensemble sera donc de la forme

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Mais est-ce à dire que, si l'on se donne n nombres réeels c_1, c_2, ...,c_n, le n-tupplet

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

appartiendra lui aussi à $\mathcal{L}(A)$?

La réponse est 'non' en général, et il suffit pour s'en convaincre de donner un contre-exemple. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et considérons l'élément $(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Si ce dernier était atteint par une combinaison linéaire des lignes de A, il existerait trois nombres réels λ_1, λ_2, λ_3 tels que

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= \lambda_1(2,0,0) + \lambda_2(1,3,0) + \lambda_3(0,-2,0) \\ &= (2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_2 - 2\lambda_3, 0)\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}2\lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ 3\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 1 \\ 0 &= 1\end{aligned}$$

et la troisième équation montre l'absurdité de l'hypothèse. En anticipant sur la suite, cet exemple s'interprète géométriquement en disant que les trois vecteur composant A sont dans le plan xOy, que toute combinaison de ces vecteurs ne pourra donner qu'un vecteur de ce plan et ne pourra jamais atteindre le vecteur $(1, 1, 1)$ qui est situé en dehors de ce plan.

Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents l'ensemble des $(c_2, \ldots, c_n)$ décrit $\mathbb{R}^n$ qui est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{L}(A)$ est donc un espace vectoriel contenu dans $\mathbb{R}^n$, mais distinct de ce dernier, ce qui nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION :

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un sous-ensemble de cet espace vectoriel qui est lui-même un espace vectoriel pour les lois induites par l'espace vectoriel.

Exemple : A étant une matrice $m \times n$, $\mathcal{L}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

COROLLAIRE :

Pour démontrer qu'un sous-ensemble S d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de vérifier que la somme de deux éléments de S appartient à S et que le produit par un scalaire d'un élément de S est encore un élément de S.

En effet, dès que l'on a ces propriétés (*on dit alors que S est stable pour chacune des deux lois*), tous les axiomes des espaces vectoriels sont automatiquement vérifiés, puisqu'ils le sont dans E et que le résultat est dans S.

EXERCICES ET EXEMPLES :

- Utiliser ce corollaire pour démontrer que, dans la plupart des exemples précédents, l'espace vectoriel cherché est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu.

Exemple : Le sous ensemble réduit à $\{0\}$ où 0 est l'élément neutre de l'addition d'un espace vectoriel est à lui tout seul un espace vectoriel.

- Dans $\mathbb{R}^2$

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0 \ , \ y \geq 0\right\}$$

n'est pas un sous espace vectoriel (les opposés n'appartiennent pas à l'ensemble).

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; xy \geq 0\right\}$$

n'est pas non plus un sous espace vectoriel car l'addition de deux vecteur peut situer le résultat dans le deuxième quadrant. Par contre

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; y = 0\right\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- L'ensemble des matrices triangulaires inférieures (supérieures) est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices (carrées) $n \times n$. Il en est de même pour l'ensemble des matrices symétriques.

- Trouver un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ stable par rapport à l'addition mais non stable par rapport à la multiplication par un scalaire (les points de coordonnées entières).

- Trouver un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ stable par rapport à la multiplication scalaire mais non stable par rapport à l'addition (les deux axes de coordonnées, les cônes de sommet O).

Ces deux derniers exemples montrent que les conditions requises pour un sous espace vectoriel sont indépendantes.

- Les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) le plan des vecteurs de première composante nulle (oui).

(b) le plan des vecteurs de première composante égale à 1 (non).

(c) $\left\{ b = (b_1, b_2, b_3) \;\middle|\; b_1 b_2 = 0 \right\}$ (non : c'est la réunion du plan $b_1 = 0$ et du plan $b_2 = 0$ dans lequel l'addition n'est pas stable).

(d) $\{(0,0,0)\}$ (oui).

(e) L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u = (1,1,0)$ et $v = (2,0,1)$ (oui).

(a=f) Les vecteur b dont les composantes satisfont à $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ (oui).

- L'ensemble des fonctions décroissantes forme-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$? (non, la multiplication par un scalaire n'est pas stable).

THÉORÈME :

Soit E un espace vectoriel, et soit B un ensemble quelconque d'éléments de E ; alors, l'ensemble $\mathcal{V}(B)$ des combinaisons linéaires d'éléments de B est un sous-espace vectoriel de E

Défini ainsi, un élément de $\mathcal{V}(B)$ s'écrira sous la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$$

où les λ_i appartiennent au corps de base, les u_i à B et où l'indice k est lui-même variable, mais fini.

Il est alors évident que la somme de deux éléments

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k \quad \text{et} \quad \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_m v_m$$

est encore une combinaison linéaire d'éléments de B, et qu'il en est de même pour la multiplication par une constante. Ces opérations sont donc stables pour le sous ensemble $\mathcal{V}(B)$ et en font donc un espace vectoriel.

$\mathcal{V}(B)$ est le plus petit sous-espace vectoriel engendré par les éléments de B, ce qui explique sa dénomination.

REMARQUE :

On retrouve par ce théorème le fait que, si A et une matrice $m \times n$, $\mathcal{L}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE :

Notion de dépendance linéaire. Bases.

Si une des lignes de la matrice A est combinaison linéaire des autres, elle n'apporte rien à la connaissance de $\mathcal{L}(A)$ en ce sens que, si on la supprime, on ne change rien au résultat

global des combinaisons linéaires [8]. Mais dans un tel cas, nous pouvons toujours écrire que

$$u_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i u_i$$

où u_j représente la ligne en question de la matrice et où les u_i représentent les autres lignes. L'égalité ci-dessus peut encore se mettre sous la forme :

$$\sum_i \mu_i u_i = 0$$

dans laquelle les μ_i ne sont pas tous nuls.

C'est la propriété contraire qui caractérise la notion d'indépendance linéaire.

DÉFINITION :

Un système de m vecteurs $V_1, \ldots, V_m$ d'un espace vectoriel est dit indépendant si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ étant des scalaires, la condition

$$\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_m V_m = 0$$

entraîne

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

COROLLAIRE :

Un sous ensemble d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants est lui-même indépendant.

Les théorèmes qui vont suivre forment l'armature de la théorie des espaces vectoriels. Ils sont caractéristiques des méthodes de raisonnement qu'on y trouve. Le lecteur pressé peut les sauter, le seul résultat que nous utiliserons étant celui du théorème C qui peut être admis.

THÉORÈME A :

Un ensemble de vecteurs non nuls $V_1, \ldots, V_m$ d'un espace vectoriel E est linéairement dépendant si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des précédents. [9]

1. Supposons que

$$V_k = \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_{k-1} V_{k-1}$$

Il existe alors la combinaison linéaire

$$\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_{k-1} V_{k-1} + (-1) V_k = 0$$

[8] Dorénavant, « combinaison linéaire » sous-entendra systématiquement « combinaison linéaire finie ».

[9] On dit aussi que les vecteurs sont « liés ».

avec le coefficient de V_k non nul (-1). Les vecteurs sont donc linéairement dépendants.

2. Réciproquement, supposons que les vecteurs sont linéairement dépendants de sorte qu'il existe $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tels que :

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_m v_m = 0$$

et soit k le plus grand indice pour lequel $\mu_k \neq 0$.

Nous pouvons alors résoudre V_k comme combinaison linéaire des précédents

$$V_k = (-\mu_k^{-1}\mu_1)V_1 + \cdots + (-\mu_k^{-1}\mu_{k-1})V_{k-1}$$

La proposition est alors démontrée sauf dans le cas où l'on aurait $k = 1$. Mais dans ce cas, nous aurions :

$$\mu_1 V_1 = 0 \quad \text{avec} \quad \mu_1 \neq 0$$

et donc $V_1 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

COROLLAIRE 1 :

Un ensemble de vecteurs est linéairement dépendant si et seulement si il contient un ensemble plus petit engendrant le même espace.

En effet, il est possible de supprimer de cet ensemble tout vecteur nul ou tout vecteur combinaison linéaire des précédents. Le nouvel ensemble continue à engendrer le même espace vectoriel, et son nombre d'éléments est plus petit.

COROLLAIRE 2 :

Tout ensemble fini de vecteurs contient un sous-ensemble qui engendre le même espace.

La démonstration se fait par induction sur le corollaire précédent.

THÉORÈME (FONDAMENTAL) B :

Soit E, l'espace vectoriel engendré par n vecteurs.
Si E contient r vecteurs linéairement indépendants, alors $n \geq r$.

Soit $A_0 = \{V_1, \ldots, V_n\}$ l'ensemble des vecteurs engendrant E, et soit $X = \{X_1, \ldots, X_r\}$ r vecteurs linéairement indépendants de E.

Puisque A_0 engendre E, X_1 est combinaison linéaire des éléments de A_0 et la suite $B_1 = \{X_1, V_1, \ldots, V_n\}$ engendre E et est linéairement dépendante.

D'après le théorème A, l'un des vecteurs de B_1 est donc combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent.

Ce n'est pas X_1 puisque c'est le premier d'un ensemble de vecteurs indépendants. Supposons que ce soit V_i qui dépende des précédents $(X_1, V_1, \ldots, V_{i-1})$. D'après le corollaire 1 ci-dessus, nous pouvons le supprimer et l'ensemble restant

$$A_1 = \{X_1, V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, V_n\}$$

engendre encore E.

Reprenons la même argumentation avec X_2. Comme A_1 engendre E, X_2 est combinaison linéaire d'éléments de A_1 et la suite

$$B_2 = \{X_2, X_1, V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, V_n\}$$

engendre E et est linéairement dépendante. L'un des vecteurs est combinaison linéaire des précédents. Ce ne peut être ni X_2 ni X_1 qui sont linéairement indépendants. Disons qu'il s'agit de V_j avec, par exemple, $j > i$ et supprimons-le. La suite

$$A_2 = \{X_2, X_1, V_1, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, V_n\}$$

engendre donc E.

Au total, cette argumentation peut être faite r fois (jusqu'à ce que nous ayons épuisé tous les X_k). À chaque étape, nous rejetons un des éléments de A_0 qui doit donc avoir initialement au moins r éléments. Donc

$$n > r$$

DÉFINITIONS :

- *Une base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent l'espace vectoriel*
- *Un espace vectoriel est dit de dimension finie si et seulement si il a une base finie.*

COROLLAIRE :

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et supposons qu'il existe deux bases dans E, une base A de n éléments et une base B de m éléments.

Puisque A engendre E et que B est linéairement indépendant, le théorème B montre que

$$n \geq m$$

Par ailleurs, B engendre E et A est linéairement indépendant, donc

$$m \geq n$$

D'où $m = n$.

DÉFINITION :

Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie s'appelle la dimension de cet espace et se note $\dim(E)$.

COROLLAIRE :

Soit E une espace vectoriel de dimension n. Alors :

(1) tout ensemble de $n+1$ vecteurs est linéairement dépendant ;
(2) aucun ensemble de $n-1$ ne peut engendrer E.

Il s'agit encore d'une simple application du théorème B.

THÉORÈME C :

Tout ensemble de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension finie forme une partie d'une base de cet espace.

Soient $X_1, \ldots, X_r$ les vecteur indépendants et $A_1, \ldots, A_n$ une base de E. Formons la suite :

$$\{X_1, \ldots, X_r, A_1, \ldots, A_n\}$$

Nous pouvons en extraire (théorème A, corollaire 2) une suite indépendante qui engendre E (c'est donc une base) en supprimant tout vecteur qui est combinaison linéaire des précédents.

Comme les X_i sont indépendants, ils ne peuvent être éliminés. Il font donc partie d'une base de l'espace.

COROLLAIRE :

Soient n vecteurs $A_1, \ldots, A_n$ d'un espace vectoriel de dimension finie n. Pour qu'ils forment une base, il est suffisant qu'ils engendrent E ou qu'ils soient linéairement indépendants.

Si l'ensemble $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ engendre E, il contient un sous ensemble A' qui est une base de E (théorème A, corollaire 2). Puisque la dimension de E est n, A' doit avoir n éléments (théorème B, corollaire 1). Donc $A' = A$ et A est une base de E.

De même, si l'ensemble A est indépendant, il forme une partie de la base (théorème C) et cette base comporte n éléments (théorème B, corollaire 1). Cette base est donc A.

THÉORÈME D :

Les lignes non nulles d'une matrice échelon réduite sont linéairement indépendantes.

Une matrice de ce type est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & 0 & b_{14} & 0 & b_{16} & b_{17} \\ 0 & 0 & 1 & b_{24} & 0 & b_{26} & b_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{36} & b_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Traitons ce cas, le cas général s'en déduit. Nous devons montrer que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ lorsque u_1, u_2, u_3 désignent les trois premières lignes de la matrice.

Or d'après la forme même de la matrice, l'identification à 0 fournit pour la première composante

$$\lambda_1 \, 1 + 0 + 0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_1 = 0.$$

Reste donc $\lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ qui donnera successivement et pour les mêmes raisons

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 0 \ .$$

COROLLAIRE :

Les lignes non nulles de la matrice réduite de la matrice A forment une base de l'espace ligne associé, $\mathcal{L}(A)$. Il en est de même, et pour les mêmes raisons, de la matrice U associée à A dans la décomposition $A = LU$.

– Tout élément de l'espace ligne est combinaison linéaire des lignes de A, donc des lignes non nulles de la matrice réduite.

– Ces lignes sont indépendantes.

Elles forment donc une base.

DÉFINITION :

On appelle rang d'une matrice la dimension de son espace ligne.

C'est donc aussi le nombre maximum de lignes indépendantes de la matrice.

COROLLAIRE :

Deux matrices à lignes équivalentes ont le même rang puisqu'elles ont toutes deux le même espace ligne (théorème D). Il suffit d'utiliser des opérations élémentaires pour passer de l'une à l'autre.

COROLLAIRE :

Une matrice $m \times n$ est de rang n si et seulement si elle est équivalente à la matrice identité I_n.

EXEMPLES :

- $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur lui-même ; il est de dimension 1.

En effet, soit e un élément quelconque non nul de $\mathbb{R}$. Il est linéairement indépendant puisqu'alors

$$\alpha e = 0 \quad \text{entraîne} \quad \alpha = 0$$

et tout x de $\mathbb{R}$ est atteint car il existe ξ_1 tel que

$$x = \xi_1 e$$

ce qui achève la démonstration.

- $\mathbb{R}^2$ est une espace vectoriel de dimension 2.

Nous avons vu que

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \, , y \in \mathbb{R} \right\}$$

l'addition étant définie par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Considérons alors les deux éléments $(1,0)$ et $(0,1)$. Ils sont linéairement indépendants. En effet

$$\lambda(1,0) + \mu(0,1) = (\lambda, \mu) = (0,0)$$

entraîne bien $\lambda = \mu = 0$. Comme de plus tout (x,y) s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux éléments :

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

la proposition est démontrée.

- Il est aisé de généraliser l'exemple précédent aux matrices $m \times n$ qui forment un espace vectoriel de dimension mn.

Il suffit en effet de prendre pour base les matrices $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls sauf un qui vaut 1. Elles sont indépendantes et toute matrice s'écrit de façon évidente en fonction de celle-là.

Retour sur l'espace ligne $\mathcal{L}(A)$.

Au cours de ce chapitre, en nous servant de l'ensemble $\mathcal{L}(A)$ des combinaisons linéaires des lignes de la matrice A, nous avons introduit la notion d'espace vectoriel et les notions d'indépendance linéaire, de base et de dimension.

$\mathcal{L}(A)$, l'ensemble des combinaisons linéaires des lignes de la matrice A, est donc le premier des quatre espaces vectoriels associés canoniquement à une matrice ; les trois derniers seront étudiés dans le chapitre suivant..

Il est contenu dans $\mathbb{R}^n$ et une de ses bases est obtenue par les lignes non nulles de la matrice U de la décomposition $A = LU$ et le nombre d'éléments de cette base s'appelle le rang de la matrice A. Nous le désignerons par la suite par le nombre r.

CHAPITRE 3

Espaces vectoriels et applications linéaires

Nous allons appliquer les résultats du chapitre précédent à l'identification du second espace vectoriel associé à une matrice, l'espace nul ou le noyau ; puis généralisant le concept d'orthogonalité, nous introduirons la notion de forme, puis d'application linéaire, avant de construire les deux derniers espaces associés à la matrice A, l'espace image et l'espace nul à gauche.

L'espace nul ou le noyau d'une matrice.

DÉFINITION :

Considérons une matrice A de dimension $m \times n$ et reprenons l'étude du système linéaire $Ax = b$ en recherchant tous les x appartenant à $\mathbb{R}^n$ qui peuvent atteindre le même point b.

La différence entre deux solutions du système ci-dessus satisfait à l'équation $Ax = 0$; autrement dit, si nous ajoutons à une solution du système $Ax = b$ une solution du système $Ax = 0$, nous obtenons encore une solution du système initial. L'ensemble des x vérifiant $Ax = 0$ revêt donc une importance particulière ; il forme ce qu'on appelle l'espace nul ou le noyau de A et on le notera $\mathcal{N}(A)$ ou Ker(A) [10].

PROPRIÉTÉS :

L'espace nul est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Il suffit de démontrer que l'espace nul est stable par rapport aux lois de l'addition et de la multiplication scalaire. Or si x et x' appartiennent à l'espace nul, la linéarité montre que :

$$A(x + x') = Ax + Ax' = 0 \quad \text{et que} \quad A(\lambda x) = \lambda Ax = 0$$

ce qui achève la démonstration.

EXEMPLE :

L'espace nul associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{est défini par le système} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[10] Ker est l'abréviation de 'kernel', le noyau.

D'où $u = 0$, puis $v = 0$. Dans ce cas, l'espace nul se réduit à $\{0\}$.

THÉORÈME :

Si U est la matrice échelon associée à la matrice A dans la décomposition $PA = LU$, le noyau de A est identique au noyau de U ($\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$).

Ce résultat est une simple conséquence de la décomposition $PA = LU$ qui entraîne que $Ax = 0$ est équivalent à $Ux = 0$ puisque P et L sont inversibles.

Le calcul explicite du noyau de A passe en général par celui du noyau de U, mais avant d'expliciter ce résultat, nous allons introduire sur un exemple une nouvelle terminologie.

VARIABLES PRINCIPALES ET VARIABLES SECONDAIRES :

Dans l'exemple introductif du chapitre précédent, nous avions calculé la matrice échelon U associée à la matrice A. Nous venons de voir que les x appartenant à ce noyau doivent satisfaire à $Ux = 0$, ce qui s'écrit :

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Divisons alors les coordonnées inconnues en deux catégories :
- les variables principales qui correspondent aux colonnes à pivot ;
- les variables secondaires [11] qui correspondent aux colonnes sans pivot.

Dans notre exemple, u et w sont les variables principales (les colonnes 1 et 3 contiennent des pivots, premier élément non nul sur la ligne correspondante), v et y sont les variables secondaires.

Dans le cas général, il y aura r variables principales si la matrice est de rang r et $n - r$ variables secondaires. Par construction, $0 \leq r \leq n$.

Revenons à notre système dont la résolution se poursuit en donnant des valeurs arbitraires aux variables secondaires et en calculant les variables principales en « rembobinant » le système. En effet

$$\begin{aligned} u + 3v + 3w + 2y &= 0 \\ 3w + \quad y &= 0 \end{aligned}$$

se met, en faisant passer les variables secondaires dans le second membre, sous la forme :

$$\begin{aligned} u + 3w &= -3v - 2y \\ 3w &= -y \end{aligned}$$

soit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[11] Faire attention qu'en anglais, variables secondaires se traduit par *free variables*, ce qui peut prêter à confusion.

C'est un système triangulaire qui se résout aisément en :

$$w = -y/3$$
$$u = -3v - y$$

Le noyau des x que nous pouvons mettre sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v - y \\ v \\ -y/3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3v & - & y \\ v & + & 0 \\ 0 & - & y/3 \\ 0 & + & y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc une double infinité de solutions dépendant des paramètres v et y.

REMARQUES :

- Les vecteurs $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants puisque le système

$$\alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

a pour unique solution $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Ils forment donc une base d'un espace vectoriel de dimension 2, celui des solutions de $Ax = 0$ et la formule définissant x ne fait que dire que tout élément du noyau s'obtient comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base.

- Le noyau $\mathcal{N}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et chacun de ses éléments possède 4 composantes.

- Le noyau $\mathcal{N}(A)$ dépend de $n - r$ paramètres. Par la suite, nous définirons la notion de « somme directe » et nous montrerons dans le cas général que $\mathbb{R}^n$ est somme directe des espaces $\mathcal{N}(A$ et $\mathcal{L}(A)$, ce qui s'écrit :

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{L}(A) \quad .$$

En attendant, nous avons la propriété suivante qui découle directement de la construction ci-dessus.

THÉORÈME :

Dans le noyau $\mathcal{N}(A)$, il est toujours possible de construire $n - r$ vecteurs indépendants.

C'est la simple généralisation de la construction que nous venons de faire. Une fois décomposé en variables principales et en variables secondaires, et les variables secondaires étant placées dans le membre de droite, le système $Ux = 0$ peut toujours se

mettre sous la forme symbolique :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = - \sum_{(n-r \text{ var.sec.})} (\text{var.sec.}) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Comme dans l'exemple précédent, la première matrice s'écrit après avoir fait passer dans le second membre les termes correspondant aux variables secondaires. Il ne subsiste alors que les r colonnes correspondant aux pivots qui se retrouvent sur la diagonale principale d'une matrice triangulaire supérieure. Et comme par définition les pivots sont non nuls, cette matrice sera inversible.

Cette matrice est multipliée à droite par une matrice colonne de r lignes contenant chacune les variables principales.

Le second membre de cette équation matricielle a, lui aussi, été mis sous forme d'une somme de $n - r$ vecteurs colonnes de r lignes et qui met en évidence comme dans l'exemple, les variables secondaires.

Autrement dit, le système ci-dessus est un système triangulaire inversible dont le second membre dépend linéairement des $n - r$ variables secondaires. Il en sera de même de sa solution, et donc des variables principales. Pour simplifier l'écriture, supposons que les variables principales soient les r premières variables. Nous pouvons alors les représenter formellement par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_{1k} x_{r+k} \\ &\cdots \\ x_r &= \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_{rk} x_{r+k} \end{aligned}$$

Avec ces même notations un élément du noyau pourra s'écrire :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_{1k} x_{r+k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_{rk} x_{r+k} \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

où nous avons fait apparaître la dépendance des variables principales en fonction des autres.

Les vecteurs ainsi formés affichent un 1 au milieu de 0 dans les composantes dont le rang est strictement supérieur à r. Ils sont donc linéairement indépendants. Le théorème suivant est la conséquence de cette propriété :

THÉORÈME :

Tout élément du noyau $\mathcal{N}(A)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $n-r$ vecteurs indépendants ; $\mathcal{N}(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-r$.

THÉORÈME :

L'intersection du noyau et de l'espace ligne est réduite à l'élément nul :

$$\mathcal{L}(A) \bigcap \mathcal{N}(A) = \{0\}$$

La démonstration de ce théorème est loin d'être une évidence. Récapitulons les hypothèses :

- $x \in \mathcal{N}(A)$ est équivalent à $Ax = 0$.
- si $x \in \mathcal{L}(A)$, il existe dans $\mathcal{L}(A)$ une base de r élément dont les coordonnées sont en escalier et qui sont construits à partir de la matrice U. Appelons $e_1, \ldots, e_r$ les éléments de cette base.

Dans ces conditions, il existe de façon unique des $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que :

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$$

et comme $Ax = 0$ par hypothèse, cela entraîne que

$$\lambda_1 A e_1 + \ldots + A\lambda_r e_r = 0$$

Si nous admettons provisoirement que les Ae_i sont indépendants dans $\mathbb{R}^m$, alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, ce qui démontre le théorème. Il reste à montrer cette propriété qui résulte des deux lemmes suivants.

LEMME 1 :

Les e_i étant définis de façon que

$$Ue_1, \ldots, Ue_r$$

soient linéairement indépendants, alors les

$$Ae_1, \ldots, Ae_r$$

sont linéairement indépendants.

Ce lemme résulte tout simplement de la décomposition $A = LU$.

LEMME 2 :

Si $e_1, \ldots, e_r$ forment une base en escalier de $\mathcal{L}(A)$, alors $Ue_1, \ldots, Ue_r$ sont linéairement indépendants.

Il suffit de démontrer ce théorème pour deux vecteurs lorsque U est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} a & b & d_1 & \ldots & d_n \\ 0 & c & f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix}$$

où a et c sont non nuls par définition. Dans ces conditions,

$$e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

d'où

$$Ue_1 = \begin{pmatrix} a^2+ & b^2+ & d_1^2+ & \cdots+ & d_n^2 \\ 0+ & bc+ & f_1d_1+ & \cdots+ & f_nd_n \end{pmatrix} \; Ue_2 = \begin{pmatrix} 0+ & bc+ & f_1d_1+ & \cdots+ & f_nd_n \\ 0+ & c^2+ & f_1^2+ & \cdots+ & f_n^2 \end{pmatrix}$$

L'hypothèse $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$ conduit au système

$$\lambda_1(a^2 + b^2 + d_1^2 + \cdots + d_n^2) + \lambda_2(bc + f_1d_1 + \cdots + f_nd_n) = 0$$
$$\lambda_1(bc + f_1d_1 + \cdots + f_nd_n) + \lambda_2(c^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2) = 0$$

dont nous devons déduire que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Or le déterminant de ce système s'écrit

$$(a^2 + b^2 + d_1^2 + \cdots + d_n^2)(c^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2) - (bc + f_1d_1 + \cdots + f_nd_n)^2$$

qui est toujours positif ou nul en vertu de l'inégalité de Schwarz. Il ne pourrait être nul que si les lignes de U étaient proportionnelles, ce qui est impossible puisque, dans cette matrice, un 0 apparaît sous le a non nul.

Le déterminant est donc toujours strictement positif et la seule solution du système est la solution nulle. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons actuellement établir le bilan suivant : à partir d'une matrice A, nous savons construire une matrice en escalier U qui , à son tour, permet de construire pour les sous-ensembles $\mathcal{L}(A)$ et $\mathcal{N}(A)$ de $\mathbb{R}^n$

- une base de $\mathcal{L}(A)$ (r éléments) ;
- une base de $\mathcal{N}(A)$ ($n - r$ éléments) ;
- et nous avons montré que $\mathcal{L}(A) \bigcap \mathcal{N}(A) = \{0\}$.

Il est alors naturel de songer à réunir les deux bases ci-dessus pour former une base de $\mathbb{R}^n$. La justification de cette possibilité est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit x un élément non nul du noyau, alors x est indépendant de tout élément non nul de l'espace ligne.

En effet, soit $y \in \mathcal{L}(A)$, $y \neq 0$, et supposons $\lambda x + \mu y = 0$. Alors $A(\lambda x + \mu y) = 0$ entraîne $\lambda Ax + \mu Ay = 0$ et donc $\mu Ay = 0$.

Comme $Ay \neq 0$ (car $y \neq 0$ et $y \in \mathcal{L}(A)$ ne peut appartenir au noyau), $\mu = 0$.

Reste $\lambda x = 0$, et comme $x \neq 0$, $\lambda = 0$. La proposition est donc démontrée.

COROLLAIRES :

1. *La base du noyau est donc indépendante de la base de l'espace ligne. La réunion des deux forme donc $n = r + n - r$ éléments indépendants dans $\mathbb{R}^n$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.*

2. *Tout élément x de $\mathbb{R}^n$ se décompose donc de manière unique selon cette base ; il peut donc s'écrire sous la forme :*

$$x = y + z \quad \textit{avec} \quad y \in \mathcal{L}(a) \quad \textit{et} \quad z \in \mathcal{N}(A)$$

et cette dernière décomposition est unique en vertu de la précédente.

3. *Les résultats précédents entraînent que :*

$$n \text{ (nombre de colonnes de } A) = \dim\mathcal{N}(A) + \dim\mathcal{L}(A) \quad .$$

REMARQUE :

Les démonstrations ci-dessus mettent en évidence que la propriété $Ax = 0$ revient à dire qu'une combinaison linéaire quelconque des ligne de la matrice A multipliée à droite au sens des matrices par un élément du noyau donne le vecteur nul (de $\mathbb{R}^m$). Ce résultat peut se traduire symboliquement par :

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Décomposée par ligne, cette propriété se symbolise par :

$$(\,.\quad .\quad .\quad .\quad .\,) \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = 0$$

Le vecteur ligne est composé à partir de $\mathcal{L}(A)$, on dit que c'est le « transposé » d'un élément de $\mathcal{L}(A)$, le vecteur colonne appartient au noyau. Cette propriété introduit une notion d'orthogonalité que nous allons développer par la suite. Nous dirons alors que $\mathcal{N}(A)$ est orthogonal à $\mathcal{L}(A)$ ou encore que tout élément de l'un est orthogonal à tout élément de l'autre.

La notion d'orthogonalité.

INTRODUCTION :

Jusqu'ici, nous avons écrit indifféremment tout élément de $\mathbb{R}^n$

$$x \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Les règles et les théorèmes que nous avons introduits permettent de préciser ces notations et de les relier en utilisant la décomposition :

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices introduites forment une base de $\mathbb{R}^n$, dite *base canonique* et l'identification initiale revient donc à identifier un vecteur avec ses composantes dans la base canonique. Nous continuerons à employer cette identification un peu abusive, mais très pratique.

PRODUIT SCALAIRE :

Étant donnés deux vecteur x et y de $\mathbb{R}^n$, la valeur du produit scalaire de x et y se définit par

$$(y, x) \equiv \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Le produit scalaire est donc une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à y et x fait correspondre le nombre (y, x) [12]. Il est immédiat de vérifier sur la définition que cette application est

- linéaire par rapport à la variable x, ce qui veut dire que :

$$(y, x + t) = (y, x) + (y, t) \quad \text{et} \quad (y, \lambda x) = \lambda (y, x)$$

- et symétrique :

$$(y, x) = (x, y)$$

Elle est donc de ce fait, aussi, linéaire par rapport à la variable y ; on dit qu'elle est *bilinéaire.*

[12] Il ne faudra évidemment pas confondre la valeur du produit scalaire (x, y) et les composantes d'un élément de $\mathbb{R}^2$ comme $(1, 0)$.

DÉFINITION ET NOTATION :

La définition du produit scalaire peut également s'écrire sous forme d'un produit de matrices :

$$(x,y) = (\, y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n \,) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

x est alors représenté par un vecteur colonne (matrice $n \times 1$) et y par un vecteur ligne (matrice $1 \times n$). Ce dernier vecteur sera dit *transposé* du vecteur y et sera noté y^t. Avec ces notations, sous forme matricielle, le produit scalaire pourra aussi s'écrire :

$$(y,x) = y^t x$$

Nous verrons par la suite que cette notion de transposition associée à un vecteur se généralise aux matrices.

NORME :

En remplaçant dans la définition du produits scalaire, y par x, nous obtenons un nombre positif. On définit alors $\|x\| \equiv \sqrt{(x,x)}$ que l'on appelle 'norme de x'.

Cette norme possède les propriétés suivantes :
pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$ et tout λ de $\mathbb{R}$.

1. $\|x\| = 0$ *équivaut à* $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La démonstration de ces propriétés est aisée.

1. résulte de ce que $\|x^2\| = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et de ce qu'une somme de nombres positifs ne peut être nulle que si chaque terme est nul.

2. résulte de la relation $\|\lambda x^2\| = \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2$ et de la définition d'une racine carrée.

3. se déduit du développement :

$$\|x + y^2\| = (x + y, x + y) = \|x^2\| + \|y^2\| + 2(x,y)$$

et est vrai si on admet l'inégalité de Schwarz $|(x,y)| \leq \|x\|y\|\|$. Cette dernière inégalité se démontre en développant la quantité positive pour tout λ de $\mathbb{R}$

$$(\diamond) \qquad (x + \lambda y, x + \lambda y) = \|x^2 + 2\lambda(x,y) + \lambda^2 \|y^2\|\| \geq 0$$

C'est donc un trinôme du second degré toujours positif. Son discriminant doit donc être négatif ou nul, donc

$$(x,y)^2 \leq \|x^2 \|y^2\|\|$$

ce qui achève de démontrer la démonstration. Remarquons enfin que l'inégalité $\diamond$ ne devient une égalité que si $(x + \lambda y, x + \lambda y) = 0$; autrement dit si $\|x + \lambda y = \|0$, ce qui revient à dire que x et y sont colinéaires.

REMARQUE :

Associée à la notion d'espace vectoriel, le produit scalaire en fait un *espace euclidien*, notion qui se généralise aux espaces vectoriels complexes, mais que nous n'aborderons pas dans le cadre de ce livre.

DÉFINITIONS :

- *Deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ sont dit orthogonaux s'ils sont non nuls et si $(x, y) = 0$.*
- *Deux sous espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux si tout vecteur de V est orthogonal à tout vecteur de W.*

THÉORÈME :

Si une suite de vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, ils sont linéairement indépendants.

Soit $V_1, \ldots, V_k$ une telle suite, et supposons qu'il existe des nombres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \cdots + \mu_k V_k = 0$$

L'application des hypothèses montre alors que, pour V_i $(i = 1, \ldots, k)$, nous avons :

$$(V_i, \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \cdots + \mu_k V_k) = \mu_i \|{V_i}^2\| = 0$$

et comme V_i est non nul, $\mu_i = 0$ pour tout $i = 1,_l dots, k$. Les vecteurs sont donc indépendants.

EXEMPLE :

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est formée de n vecteurs orthogonaux et normés à 1. On retrouve ainsi le fait qu'ils sont indépendants.

COROLLAIRE :

L'espace ligne et le noyau d'une matrice sont orthogonaux $(\mathcal{L}(A) \perp \mathcal{N}(A))$.

Cette propriété est évidente compte tenu de l'interprétation que nous avons donnée de $Ax = 0$ en termes de vecteurs lignes.

La notion de forme linéaire.

DÉFINITION :

Fixons, dans la définition du produit scalaire, une des variables, disons y, et pour mettre en évidence ce fait, posons :

$$(y, x) = f_y(x)$$

les propriétés de linéarité par rapport à la variable x se traduisent alors par :

$$f_y(x + t) = f_y(x) + f_y(t) \quad \text{et} \quad f_y(\lambda x) = \lambda f_y(x)$$

Ces relations permettent de définir une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui respecte les lois d'addition et de multiplication des deux espaces vectoriels. On dit dans ce cas que l'application est un *homomorphisme d'espaces vectoriels.* Lorsque, comme c'est le cas ici, l'espace d'arrivée de l'application est le corps de base, l'application est qualifiée de *forme linéaire* [13].

Le produit scalaire n'est évidemment pas la seule façon de construire des formes linéaires et toute application f de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait à

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

définit une forme linéaire. Elles sont caractérisées par le théorème suivant :

THÉORÈME :

Si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et si $c_1, \ldots, c_n$ sont n nombres réels, alors il existe une forme linéaire et une seule f telle que

$$f(e_i) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et cette forme est définie par la formule

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n$$

La démonstration de la formule se fait par récurrence sur n. Elle est vraie pour $n = 1$ ($f(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 f(e_1) = \lambda_1 c_1$ par définition d'une forme. Le passage de n à $n+1$ résulte de la définition : $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Réciproquement, soit $e_1, \ldots, e_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$; alors tout x de $\mathbb{R}^n$ a l'*unique* représentation :

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Soient maintenant $c_1, \ldots, c_n$ des éléments de $\mathbb{R}$; la formule

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)$$

a un sens pour tout x et définit une *unique* application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et cette application est linéaire, car

$$\begin{array}{lll}
f(\alpha x + \beta t) & = f(\sum_i (\alpha x_i + \beta t_i) e_i) & \text{(décomposition de } \alpha x + \beta t \text{ sur la base)} \\
& = \sum_i f(\alpha x_i + \beta t_i) c_i & \text{(définition de } f) \\
& = \alpha \sum_i f(x_i c_i) + \beta \sum_i f(t_i c_i) & \text{(distributivité des réels)} \\
& = \alpha f(\sum_i x_i e_i) + \beta f(\sum_i t_i e_i) & \text{(définition de } f) \\
& = \alpha f(x) + \beta f(t) & \text{(définition de } x \text{ et de } t)
\end{array}$$

et la propriété est démontrée.

[13] Par la suite, nous étendront cette définition à deux espaces vectoriels quelconques.

COROLLAIRE :

Dans une base donnée, toute forme linéaire peut s'écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

où n est la dimension de la base.
Il suffit en effet de choisir

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$\text{et} \quad f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \quad \text{avec} \quad f(e_i) \equiv c_i$$

COROLLAIRE (THÉORÈME DE RIESZ) :

À tout forme linéaire f correspond un unique élément c de $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = (c, x)$$

C'est une sorte de réciproque de l'exemple qui nous a servi à introduire les formes linéaires. Il suffit de choisir dans la base canonique

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

REMARQUE :

En utilisant les composantes, le théorème précédent s'écrit

$$f(x) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (c, x)$$

Nous faisons correspondre à toute forme linéaire f dans la base canonique un élément de $\mathbb{R}^n$ (et réciproquement) par

$$\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \longrightarrow c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

En notation matricielle, ceci s'écrit

$$c^t x = f(x) = (c, x)$$

Il est à noter que ces résultats ne sont démontrés que pour le produit scalaire usuel. Ils s'étendent cependant aux différents autres produits scalaires qui peuvent être définis sur $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME :

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ forment un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies par :

$$(f+g)(x) \equiv f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) \equiv \lambda f(x)$$

Cet espace vectoriel s'appelle l'«espace dual» de $\mathbb{R}^n$.

Il suffit de démontrer que $f+g$ et λf sont encore des formes linéaires, ce qui est évident et laissé en exercice au lecteur.

COROLLAIRE :

On peut montrer () que le dual de $\mathbb{R}^n$ a pour dimension n et que le dual du dual (le bidual) est $\mathbb{R}^n$.

La notion d'application linéaire.

C'est une simple généralisation de la notion de forme linéaire dont nous venons de voir les principales propriétés.

DÉFINITION :

E $(= \mathbb{R}^n)$ et F $(= \mathbb{R}^m)$ sont deux espaces vectoriels sur le même corps $(\mathbb{R})$. Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$ et tout λ et μ de $\mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad .$$

Cette définition est indépendante de la notion de dimension, et comme elle est analogue à celle des formes linéaires, nous avons immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME :

L'application linéaire f est parfaitement définie si on connaît les valeurs dans $\mathbb{R}^m$ de n éléments indépendants de $\mathbb{R}^n$

Autrement dit, si nous nous donnons n vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire une base) $e_1, \ldots, e_n$ et n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ et si nous posons :

$$f(e_i) = c_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

l'application f sera uniquement définie par

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n$$

et elle sera linéaire.

La démonstration de cette propriété est l'analogue de celle correspondant aux formes linéaires ; elle est donc laissée comme exercice au lecteur.

Applications linéaires et matrices :

Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ une base de F et f une application linéaire de E dans F. Tout x de E s'écrit donc de manière unique

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

et par linéarité, $f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)$$

Les $f(e_j)$ définissent donc sans ambiguïté f et comme ils appartiennent à F, ils se décomposent suivant la base des ϵ_j de F

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \epsilon_j$$

Les α_{ij} rangés selon la convention

$$\begin{array}{rl} & \alpha_{ij} \qquad (i : \text{numéro de ligne} ; \ j : \text{numéro de colonne}) \\ m \text{ lignes} & \mid \ n \text{ colonnes} \end{array}$$

définissent un tableau rectangulaire : la matrice de f par rapport aux bases (e_i) et (ϵ_j) ; la j-ème colonne de la matrice est formée des composantes de $f(e_j)$ dans la base $(\epsilon_j$, *ce qui fournit la règle de construction de la matrice.*

De cette construction, il résulte qu'une matrice, à elle seule, ne peut représenter une application linéaire. Pour qu'une matrice représente une application linéaire, il faut avoir défini, en plus, une base dans l'espace de départ et une autre dans l'espace d'arrivée.

Exemple :

Considérons dans $E = \mathbb{R}^3$ la base canonique définie par les 3 vecteurs e_1, e_2, e_3, dans $F = \mathbb{R}^2$, la base canonique définie par ϵ_1, ϵ_2 et l'application f définie par

$$f : E \longrightarrow F \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

Cette application est linéaire. Elle est d'abord additive puisque

$$\begin{aligned} f(x+u) &= \begin{pmatrix} x_1+u_1+x_2+u_2+x_3+u_3 \\ x_1+u_1-3x_3-3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+u_1+u_2+u_3 \\ x_1-3x_3+u_1-3u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1-3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1+u_2+u_3 \\ u_1-3u_3 \end{pmatrix} \\ &= f(x)+f(u) \end{aligned}$$

d'après la définition de f et l'addition dans $\mathbb{R}^2$. La propriété de multiplication scalaire se démontrerait de même, ce qui justifie la linéarité.

Déterminons maintenant la matrice de f dans les bases choisies. Sa première colonne est formée des composantes de $f(e_1)$ dans la base (ϵ)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{ou } f(e_1) = \epsilon_1 + \epsilon_2)$$

De même

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ou } f(e_2) = \epsilon_1)$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (\text{ou } f(e_3) = \epsilon_1 - 3\epsilon_2)$$

La matrice s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Il existe une autre méthode pour écrire cette matrice. Nous avons vu que :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\epsilon_i$$

et si nous appelons y_i les composantes de $f(x)$ dans la base (ϵ)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i \epsilon_i$$

nous obtenons par identification :

$$y_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n$$

Dans l'exemple précédent :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

nous pouvons écrire directement :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Si dans la définition

$$f(e_j) = \sum_{k=1} \alpha_{kj} \epsilon_k \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

nous introduisons l'opérateur associé A, nous pouvons écrire :

$$Ae_j = \sum_{k=1} \alpha_{kj} \epsilon_k \quad .$$

Le produit scalaire avec ϵ_i

$$(\epsilon_i, Ae_j) = \sum_{k=1} \alpha_{kj} (\epsilon_i, \epsilon_k) = \alpha_{ij}$$

permet d'écrire les coefficients de la matrice sous la forme :

$$(\epsilon_i, Ae_j) = \alpha_{ij}$$

Attention : cette formule suppose que la base choisie est une base orthonormée.

Opérateur adjoint et matrice transposée.

Introduction :

Soit $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$; Ax appartient donc à $\mathbb{R}^m$.

Soit y un élément de $\mathbb{R}^m$; le produit scalaire $(y, Ax)_{\mathbb{R}^m}$ a un sens et il dépend linéairement de x. Autrement dit, y étant fixé, l'application

$$x \longrightarrow (y, Ax)_{\mathbb{R}^m}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Or (théorème de Riesz) à une telle forme correspond un unique élément de $\mathbb{R}^n$ que nous noterons y^* et qui est défini par :

$$(y^*, x) = (y, Ax)$$

y^* dépend donc de y, et cette dépendance est linéaire. En effet, nous pouvons écrire en utilisant la linéarité du produit scalaire pour tout x :

$$(y_1 + y_2, Ax) = (y_1, Ax) + (y_2, Ax)$$

puis la définition de y^*

$$((y_1 + y_2)^*, x)) = (y_1^*, Ax) + (y_2^*, Ax)$$

et donc

$$(y_1 + y_2)^* = y_1^* + y_2^*$$

et nous pourrions faire une démonstration analogue pour la multiplication par un scalaire. Puisque la dépendance entre y^* et y est linéaire, nous pouvons toujours la noter (dans le cas réel)

$$y^* = A^t y$$

où A^t désigne l'application linéaire (l'opérateur) définie de manière unique. En effet, supposons que cette définition conduise à deux applications, nous pourrions écrire pour tout x et tout y

$$(y^*, x) = (y, Ax) = (A_1^t y, x) = (A_2^t y, x)$$

puis, en appliquant la linéarité du produit scalaire

$$\big((A_1^t - A_2^t)y, x)\big) = 0$$

qui s'écrit en choisissant $x = (A_1^t - A_2^t)y$

$$\|(A_1^t - A_2^t)y^2\| = 0$$

enfin, en utilisant les propriétés des normes

$$(A_1^t - A_2^t)y = 0 \quad \text{, ceci pour tout } y, \text{ donc} \quad A_1^t = A_2^t$$

ce qui achève la démonstration de l'unicité. Nous pouvons donc poser :

Définition :

A étant un opérateur (application) linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on appelle opérateur adjoint de l'opérateur A, l'opérateur A^t de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ défini pour tout x de $\mathbb{R}^n$ et tout y de $\mathbb{R}^m$ par

$$(A^t y, x)_{\mathbb{R}^n} = (y, Ax)_{\mathbb{R}^m}$$

Soit (e_j) la base de $\mathbb{R}^n$ et (ϵ_i) celle de $\mathbb{R}^m$. La matrice associée à A dans ces bases s'évalue en développant Ae_j dans la bases des (ϵ_i) :

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} (\epsilon_i, Aej)$$

les coefficients de la matrice de A sont les produits scalaires

$$(\epsilon_i, Aej)$$

i étant l'indice de ligne, j celui de colonne.
La matrice associée à A^t fait passer de $\mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R}^n$; elle a pour coefficients

$$\begin{aligned}(e_l, A^t\epsilon_k) &= (A^t\epsilon_k, e_l) \quad \text{symétrie du produit scalaire,}\\ &= (\epsilon_k, Ae_l) \quad \text{définition de } A^t,\end{aligned}$$

d'où

$$\left(A^t\right)_{lk} = (A)_{kl}$$

Il y a transposition des indices, d'où le nom de matrice transposée que l'on donne à la matrice associée à A^t. Et une matrice sera dite symétrique, si elle est égale à sa transposée (ce qui ne peut se faire que si $n = m$).

Propriétés des opérateurs adjoints :

- $\left(A^t\right)^t = A$

Posons $B = A^t$; par définition de l'adjoint, pour tout x et y

$$\begin{aligned}(B^t y, x) = (y, Bx) = (y, A^t x) = (A^t x, y)\\ = (x, Ay) = (Ax, y)\end{aligned}$$

et puisque c'est vrai pour tout x, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\text{pour tout} \quad B^t y = Ay \quad \text{et donc} \quad B^t = A$$

Comme $B^t = A$, l'égalité précédente n'est autre que $\left(A^t\right)^t = A$

- $(AB)^t = B^t A^t$

Par définition de l'opérateur adjoint, nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned}\left((AB)^t y, x\right) &= (y, ABx)\\ &= (A^t y, Bx)\\ &= (B^t A^t y, x)\end{aligned}$$

L'égalité ayant lieu pour tout x et tout y, la propriété est démontrée.

- $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

L'opérateur A étant inversible, $m = n$ et la matrice associée est carrée. Par définition de l'inverse, $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. En prenant les transposés de ces égalités

$$\begin{aligned}\left(AA^{-1}\right)^t &= I = \left(A^{-1}A\right)^t\\ \left(A^{-1}\right)^t A^t &= I = A^t \left(A^{-1}\right)^t\end{aligned}$$

et en tenant compte de l'unicité de l'inverse, nous obtenons le résultat cherché.

$$\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$$

L'espace colonne d'une matrice A.

INTRODUCTION :

Considérons les quantités :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \; ; \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \; ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

et étudions le système $Ax = b$.

Ce système contient moins d'inconnues que d'équations ; il impose donc des contraintes qui ne sont pas, en général, satisfaites et il n'admet pas *a priori* de solution.

Il ne sera soluble que si b peut être exprimé comme une combinaison linéaire des colonnes de A, résultat évident si le système est écrit sous la forme :

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Il reste alors à trouver u et v, c'est-à-dire les scalaires qui, multipliés aux colonnes de A permettent de trouver b.

Or, l'ensembles de b, appartenant à $\mathbb{R}^m$ et qui sont accessible de cette façon, est formé par l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A. C'est un plan. En effet, si nous « géométrisons » le problème, à chaque colonne correspond un vecteur défini par ses coordonnées par rapport à la base canonique, par exemple :

$$e_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \quad e_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants [14], mais ce n'est pas obligatoire. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs forme un plan et le système initial peut être résolu si, et seulement si, b se trouve dans le plan engendré par les vecteurs colonnes de A.

Si b n'est pas dans ce plan, le système n'a pas de solution et l'interprétation géométrique montre le « peu de chances » que nous avons de trouver des solutions d'un tel système.

---

[14] En effet, l'égalité $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0$ équivaut au système

$$\begin{aligned} \lambda + 0 &= 0 \\ 5\lambda + 4\mu &= 0 \\ 2\lambda + 4\mu &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\lambda = 0$, puis $\mu = 0$.

Tout cela se généralise et montre l'importance de l'ensemble des éléments qu'une matrice peut atteindre par combinaison linéaire de ses colonnes, ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION :

On appelle espace colonne de A l'espace engendré par les colonnes de la matrice $m \times n$ A.

Cette définition peut prendre d'autres formes comme

$$\left\{ Ax \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

que nous aurions pu écrire symboliquement

$$m \text{ lignes} \quad \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$n \text{ colonnes}$$

C'est aussi, par définition, l'image de $\mathbb{R}^n$ par A que nous noterons $\mathcal{I}m(A)$ [15] et que nous pouvons également traduire par :

$$\mathcal{I}m(A) = \left\{ b \;\middle|\; Ax = b \qquad \text{peut être résolu.} \right\}$$

PROPRIÉTÉ :

L'image de A, $\mathcal{I}m(A)$, est contenue, par construction, dans $\mathbb{R}^m$. C'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ et l'on a : $\dim \mathcal{I}m(A) \leq m$.

Pour démontrer cette propriété, il suffit de montrer, puisque 0 appartient à $\mathcal{I}m(A)$, que si b et b' appartiennent eux aussi à $\mathcal{I}m(A)$, il en est de même de $b + b'$ et de λb.

Or, par définition de l'image, il existe x et x' tels que $Ax = b$ et $Ax' = b'$. La linéarité de A montre alors que $b + b' = Ax + Ax' = A(x + x')$ est l'image de l'élément $x + x'$ de $\mathbb{R}^n$. Il en est de même de λb.

THÉORÈME :

Soit A, une matrice $m \times m$ et soient P, L, U les matrices correspondant à la décomposition de A

$$PA = LU \quad ou \quad A = P^{-1}LU \quad .$$

Cette décomposition entraîne la propriété suivante : les colonnes indépendantes de A correspondent aux colonnes indépendantes de U.

---

[15] On trouve également, dans les pays anglo-saxons la notation $\mathcal{R}(A)$ où $\mathcal{R}$ rappelle la première lettre de *range* (champ, étendue, portée ; à ne pas confondre avec *rank* : le rang).

Il revient au même de dire que les colonnes dépendantes de A correspondent aux colonnes dépendantes de U. Or de l'égalité ci-dessus se déduit :

$$Ax = 0 \quad \text{équivaut à} \quad P^{-1}LUx = 0 \quad \text{équivaut à} \quad Ux = 0$$

Autrement dit, les coordonnées de x sont les coefficients des combinaisons linéaires de colonnes de A ; il en est de même pour U ; ce sont les mêmes et les colonnes se correspondent.

COROLLAIRE 1 :

$\mathcal{I}m(A)$ est engendré par les colonnes indépendantes de A qui sont en même nombre que les colonnes indépendantes de U ; donc :

$$\dim A(\mathbb{R}^n) = \dim U(\mathbb{R}^n) = r \leq m$$

COROLLAIRE 2 :

Les colonnes indépendantes de A forment une base de l'espace colonne de A.

REMARQUES :

- Les dimensions de $A(\mathbb{R}^n)$ et de $U(\mathbb{R}^n)$ sont les mêmes, mais les images ne sont pas les mêmes : pour passer de l'une à l'autre, il faut multiplier une des matrices par $P^{-1}L$ ou par son inverse.
- Ce choix de base se voit directement sur la matrice U qui se symbolise par

$$\left.\begin{matrix} \\ r \text{ lignes} \end{matrix}\right\{ \underbrace{\begin{pmatrix} * & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & * & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & * & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ lignes}$$

Si U admet r pivots (c'est-à-dire r lignes indépendantes), les colonnes associées aux pivots sont également indépendantes puisque les vecteurs colonnes associés sont également, par construction, en échelon. Par le même type de raisonnement que ci-dessus, les colonnes correspondantes de A seront linéairement indépendantes, et leur nombre sera le même.

Il est possibles de trouver d'autres vecteurs colonnes indépendants et différents de ceux que nous venons de choisir. Par exemple, sur la matrice symbolique ci-dessus, les première, deuxième, quatrième et neuvième colonnes sont indépendantes, mais nous aurions pu choisir la troisième colonne au lieu de la seconde, si l'élément de la seconde ligne est non nul, ce dont *a priori* nous ne sommes pas assurés. Par contre, le fait de choisir les colonnes à pivot évite de se poser la question. Nous sommes assurés par ce procédé d'obtenir une base.

• Si A est une matrice, l'espace ligne de A est égal à l'espace colonne de sa transposée A^t. Et comme, par construction, le nombre de colonnes indépendantes d'une matrice est égal au nombre de ses lignes indépendantes, nous avons la relation :

$$\dim \mathcal{I}m(A) = \dim \mathcal{I}m(A^t) = r$$

et en particulier, si les lignes d'une matrice carrée sont indépendantes, il en est de même de ses colonnes.

L'espace nul à gauche.

C'est le dernier des quatre espaces qui manque à la collection.

DÉFINITION :

L'espace nul à gauche est, par définition, l'ensemble des y appartenant à $\mathbb{R}^m$ tels que

$$y^t A = 0$$

C'est de cette écriture que provient le nom de l'espace (nul à gauche) ; le zéro de la définition est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

Comme la transposée de la définition ci-dessus s'écrit

$$A^t y = 0$$

l'espace nul à gauche peut s'interpréter comme le noyau de la matrice A^t. C'est la raison pour laquelle cet espace est en général désigné par la notation $\mathcal{N}(A^t)$ et que nous pouvons écrire indifféremment :

$$\mathcal{N}(A^t) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; y^t A = 0 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; A^t y = 0 \right\}$$

REMARQUE :

$\mathcal{N}(A^t)$ est associé à $\mathcal{I}m(A)$ de la même manière que $\mathcal{N}(A)$ est associé à $\mathcal{L}(A)$ et les théorèmes associés à chaque couple d'espace se retrouvent, disons transposés, pour l'autre couple.

THÉORÈME :

La dimension de l'espace nul à gauche est $m - r$. Autrement dit

$$\dim \mathcal{N}(A^t) = m - r$$

Pour le démontrer, il suffit d'appliquer à la matrice transposée A^t le théorème analogue sur la matrice A. A^t étant une matrice $m \times n$:

$$\text{nombre de colonnes de } A^t = \dim \mathcal{N}(A^t) + \dim \mathcal{I}m(A^t)$$

Comme nous venons de voir que $\dim \mathcal{I}m(A^t) = r$, le résultat s'ensuit.

BASE DE $\mathcal{N}(A^t)$:

Nous pourrions appliquer pour trouver une base de $\mathcal{N}(A^t)$ la même technique que nous avons appliquée à $\mathcal{N}(A)$, mais il y a beaucoup plus simple pour en obtenir une. Il suffit de remarquer que d'après la relation

$$U = L^{-1}PA$$

les $m - r$ dernières lignes de U étant nulles, les vecteurs formés par les $m - r$ dernières lignes de $L^{-1}P$ composent la base cherché, puisque chacun d'eux multipliant à gauche A donne 0. Ils sont de plus indépendant car il suffit de multiplier $L^{-1}P$ par P^{-1} pour vérifier qu'ils sont en échelon. Une fois de plus, la décomposition $PA = LU$ montre sa puissance.

Lien entre les quatre espaces associés à une matrice.

Les quatre espaces que nous avons construits ne sont pas apparus de façon régulière au cours de cet ouvrage. Chacun a souvent bénéficié des apports des précédents, le premier, l'espace ligne de A débroussaillant le terrain des concepts que le dernier, l'espace nul à gauche, $\mathcal{N}(A^t)$ n'avait plus qu'a appliquer. Il ne faudrait pas en déduire que ces espaces n'ont pas des 'poids' égaux dans la théorie des systèmes linéaires et les théorèmes qui vont suivre illustreront ce propos.

Le tableau suivant rappelle brièvement nos notations

A est une matrice à m lignes et n colonnes, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

espace	sous-espace de	notation	dimension
ligne de A	$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{L}(A)$	r
noyau de A	$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{N}(A)$	$n - r$
colonne de A	$\mathbb{R}^m$	$\mathcal{I}m(A)$	r
nul à gauche de A	$\mathbb{R}^m$	$\mathcal{N}(A^t)$	$m - r$

THÉORÈME :

A est une matrice $m \times n$

1. *$\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{L}(A)$ sont des sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^n$*
2. *$\mathcal{N}(A^t)$ et $\mathcal{I}m(A^t)$ sont des sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^m$*

La démonstration de **1.** est simple. Soit x un élément du noyau de A ; par définition $Ax = 0$, donc tout vecteur ligne de A est orthogonal à x, et il en est donc de même de toute combinaison linéaire des lignes de A, donc de tout élément de $\mathcal{L}(A)$.

Soit alors x un élément de $\mathcal{L}(A)$; x s'exprime en fonction d'une base de $\mathcal{L}(A)$, (e_i) par exemple :

$$x = \sum_i \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad Ax = 0 \quad \text{entraîne} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{pour tout } i, \text{ et donc} \quad x = 0$$

L'intersection de $\mathcal{N}(A)$ et de $\mathcal{L}(A)$ est donc réduite au vecteur nul et les espace sont orthogonaux.

Pour démontrer **2.**, il suffit d'appliquer **1.** à A^t.

COROLLAIRE :

Les espaces $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{L}(A)$ sont non seulement orthogonaux mais encore complémentaires dans $\mathbb{R}^n$. De même, $\mathcal{N}(A^t)$ et $\mathcal{I}m(A)$ sont des espaces complémentaires dans $\mathbb{R}^m$.

Comme $\dim \mathcal{L}(A) = r$ et $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$, que leur intersection est réduite au vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, la dimension de l'espace engendré par $\mathcal{L}(A)$ et $\mathcal{N}(A)$ est n ; c'est donc $\mathbb{R}^n$. Il sera alors possible de décomposer tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ en deux vecteurs orthogonaux x_l appartenant à $\mathcal{L}(A)$ et x_n appartenant à $\mathcal{N}(A)$ en utilisant les propriétés de A et tels que

$$x = x_l + x_n \qquad Ax = Ax_l \qquad Ax_n = 0$$

Dans ce cas $\mathcal{L}(A)$ et $\mathcal{N}(A)$ sont dits compléments orthogonaux l'un de l'autre, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{N}(A) = [\mathcal{L}(A)]^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(A) = [\mathcal{N}(A)]^{\perp}$$

De même

$$\mathcal{N}(A^t) = [\mathcal{I}m(A)]^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(A) = \left[\mathcal{N}(A^t)\right]^{\perp}$$

Ces propriétés sont importantes : deux espace peuvent être orthogonaux sans être complémentaires : deux axes de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, par exemple.

Tout ce qui vient d'être vu au cours de ces chapitres peut se résumer sur la figure suivante :

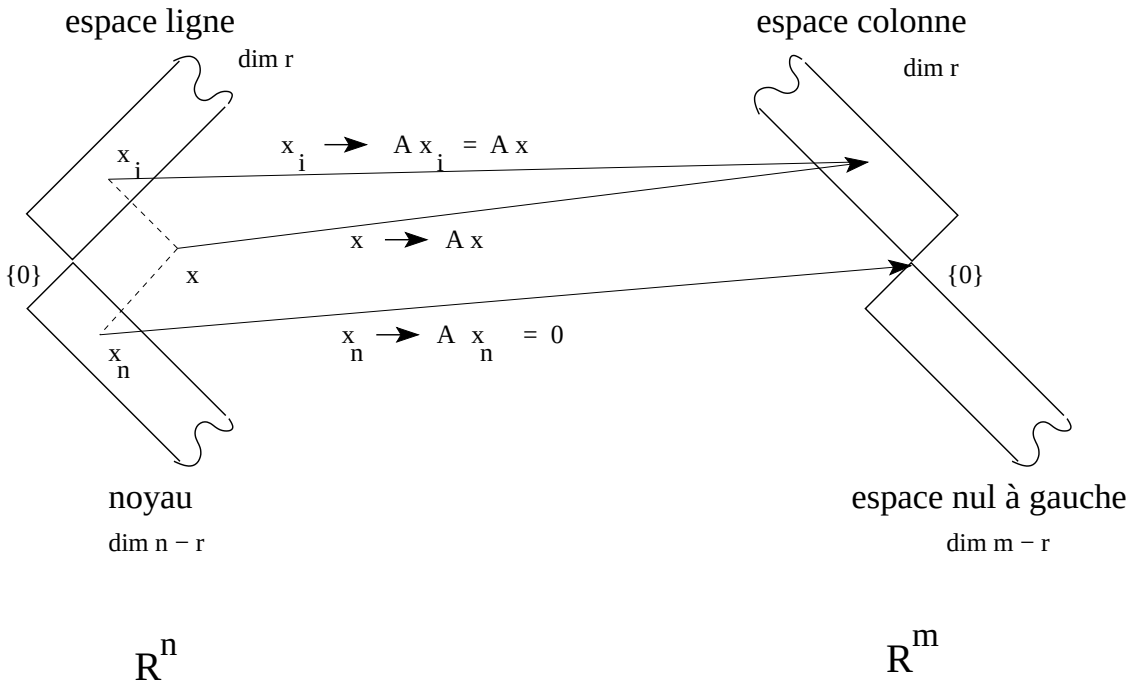

Figure 3.1. Liens entre la matrice A et les espaces vectoriels qui lui sont associés. Ces dernier sont symbolisés par des rectangles "généralisant" les axes de coordonnées

Cette figure met en évidence le théorème suivant :

THÉORÈME :

L'application induite de A de l'espace ligne dans l'espace colonne est inversible.

En effet, si b appartient à l'espace colonne, il est par définition combinaison linéaire des colonnes de A ; donc il existe un x appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$.

Cet élément x peut alors être décomposé selon l'espace ligne et le noyau :

$$x = x_l + x_n \quad \text{avec} \quad x_l \in \mathcal{L}(A) \quad \text{et} \quad x_n \in \mathcal{N}(A)$$

À partir d'un élément b, nous avons donc trouvé un élément x_l tel que $Ax_l = Ax_l + Ax_n = b$. Il reste à démontrer que cet élément est unique. Supposons donc qu'il en existe un autre x'_l tel que $Ax'_l = b$. Nous aurons alors

$$A(x_l - x'_l) = b - b = 0$$

L'élément $x_l - x'_l$ appartiendra donc à la fois au noyau et à l'espace ligne. Il ne pourra donc être que 0. Donc $x_l = x'_l$.

Donc à tout élément de l'espace colonne correspond un élément et un seul de l'espace ligne. L'application ci-dessus est donc inversible.

CHAPITRE 4

Les systèmes surdéterminés

La notion de système linéaire surdéterminé.

EXEMPLE INTRODUCTIF ET DÉFINITION :

Dans ce chapitre nous étudierons les systèmes linéaires du type

$$Ax = b \quad \text{où } A \text{ est une matrice } m \text{ lignes, } n \text{ colonnes et } m > n.$$

De tels systèmes possèdent plus d'équations que d'inconnues ; ils sont dits *surdéterminés* et il est aisé de comprendre qu'ils n'ont en général pas de solution. Supposons en effet que nous sachions résoudre le sous-système formé des n premières équations (ou de n équations parmi ces m) ; pour que le système, en entier, soit résoluble, il faut que la solution que nous venons de trouver soit aussi solution des $m - n$ équations restantes, ce qui crée autant de condition de compatibilité à satisfaire ; et il n'y a aucune raison pour qu'elles le soient.

Considérons, par exemple, le système :

$$\begin{aligned} 2x &= b_1 \\ 3x &= b_2 \\ 4x &= b_3 \end{aligned} \qquad \text{où donc, avec nos notations} \quad A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Du point de vue mathématique pur, si les b_i ne sont pas dans le rapport $2 : 3 : 4$, il n'y aura pas de solution. La théorie indique en effet que, dans ce cas, le système est formé d'équations incompatibles, et, plus précisément, qu'il ne peut y avoir de solution que si le point b se trouve sur la droite passant par l'origine et de direction $(2, 3, 4)$. Cette droite n'est autre que l'espace colonne de la matrice A.

Changeons maintenant de point de vue et mesurons à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre la valeur d'une résistance donnée. Admettons donc, pour l'exemple que nous fassions trois mesures qui donnent successivement :

mesure 1 :	b_1 (volts)	2 (ampères)
mesure 2 :	b_2 (volts)	3 (ampères)
mesure 3 :	b_3 (volts)	4 (ampères)

Si nous appliquons alors la loi d'Ohm (RI=V), nous devons avoir pour la résistance

$$\begin{aligned} 2R &= b_1 \\ 3R &= b_2 \\ 4R &= b_3 \end{aligned}$$

Autrement dit, nous retrouvons exactement le même système que le précédent (au remplacement du x par R) et il n'y a pas plus de raisons que précédemment de pouvoir le résoudre tant que le rapport de $b_1 : b_2 : b_3$ ne sera pas dans le rapport $2 : 3 : 4$, ce qui, compte tenu des erreurs de mesure a fort peu de chances d'arriver.

Nous nous trouvons donc devant un « paradoxe » : nous savons, par ce qu'il représente physiquement, que le système admet une unique solution (la résistance, définie par la loi d'Ohm, est parfaitement déterminée dans un domaine donné), mais les résultats des mesures empêchent de la calculer mathématiquement. Il nous faudra donc trouver une méthode qui donne une solution approchée dans un sens qui reste à préciser et qui, lorsque le système devient compatible, fournit la solution attendue ; ce sera la solution "aux moindres carrés" ou "pseudo-solution" du système. Nous commencerons par présenter cette solution sur le même exemple, puis nous montrerons comment il est possible de la calculer explicitement avant de proposer des théorèmes généraux.

Pseudo-solutions des systèmes surdéterminés. Introduction d'une solution "aux moindres carrés" :

Gauss, toujours lui, a eu l'idée de définir un « écart à la solution du système » et de choisir cet écart de façon que, les paramètres variant, il passe par un minimum et que ce minimum définisse une quantité unique. Cette quantité sera, pour l'instant, appelée "pseudo-solution" du système.

Nous allons commencer par approfondir ce langage sur l'exemple ci-dessus.

Si x était solution du système $Ax = b$, on aurait en particulier $2x - b_1 = 0$. Si x maintenant est un nombre quelconque, la quantité $2x - b_1$ est non nulle et donne une idée par son écart à 0 de l'écart existant entre x et la solution exacte. Il en est de même des quantités $3x - b_2$ et $4x - b_3$.

L'idée consiste alors à faire une combinaison de ces quantités pour définir l'écart que nous recherchons. La difficulté est qu'il existe évidemment une infinité de fonction de ces quantités. Il est logique d'éliminer la somme

$$E(x) = (2x - b_1) + (3x - b_2) + (4x - b_3)$$

car elle ne possède pas de minimum. Par ailleurs, les valeurs de chaque quantité pouvant fluctuer autour de 0, il est intéressant de prendre en compte leurs valeurs absolues, ce qui permettrait de tester des quantités du type :

$$E(x) = |2x - b_1| + |3x - b_2| + |4x - b_3|$$
$$E(x) = \sup(|2x - b_1|, |3x - b_2|, |4x - b_3|)$$
$$E(x) = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2$$

ou toute pondération de ces quantités par des coefficients positifs. Pour des raisons liées à la structure naturelle de l'espace euclidien, c'est la dernière expression qui a été choisie [16] puisque elle peut s'écrire

$$\|Ax - b^2\|$$

[16] Du point de vue des mathématiques, cette définition est la seule qui permette une utilisation simple car elle conduit à des expressions linéaires.

dont le minimum n'est rien d'autre dans $\mathbb{R}^3$ que le carré de la distance de b à la droite représentant l'espace colonne de la matrice A. Nous reviendrons bientôt sur ce point.
En attendant, choisissons pour définition de l'écart :

$$E(x) = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2 ;$$

E définit alors une courbe du second degré, une parabole, dont, par construction, le coefficient du terme en x^2 est positif ($2^2+3^2+4^2$). La parabole tourne donc sa concavité vers le haut et possède de ce fait un minimum qui est défini par l'annulation de

$$\frac{dE}{dx} = 2\left(2(2x - b_1) + 2(3x - b_2) + 2(4x - b_3)\right) = 0$$

soit pour

$$\overline{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{29}$$

Avec ce choix d'écart, il est alors naturel d'appeler $\overline{x}$ *solution aux moindres carrés du système surdéterminé initial* (au lieu de pseudo-solution).

Premières généralisation des solutions aux moindres carrés :

L'exemple précédent s'étend immédiatement au système :

$$Ax = b \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix}$$

et il est instructif d'employer, pour résoudre le système correspondant, le langage matriciel que nous retrouverons dans le cas général.
La définition de l'écart associé s'étend sans difficulté et nous pouvons écrire successivement :

$$\begin{aligned} E(x) &= (a_1x - b_1)^2 + \cdots (a_mx - b_m)^2 \\ &= \|Ax - b^2\| \\ &= (Ax - b)^t(Ax - b) = (xA^tb - b^t)(Ax - b) \\ &= x^tA^tAx - x^tA^tb - b^tAx + b^tb \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que x est un scalaire et des propriétés de la transposition. Comme b et, dans ce cas, A sont des vecteurs, leur produit scalaire est commutatif et donc $A^tb = b^tA$. L'écart s'écrit en définitive :

$$E(x) = x^2A^tA - 2A^tbx + b^tb$$

Comme précédemment, le graphe de E est une parabole et puisque $A^tA > 0$, sa concavité est tournée vers le haut. Cette parabole, donc l'écart, admet un minimum qui est atteint pour $\overline{x}$ défini par :

$$\frac{dE}{dx} = 0 = 2A^tA\overline{x} - 2A^tb \quad \text{soit} \quad \overline{x} = \frac{A^tb}{A^tA}$$

Comme dans l'exemple précédent, $\overline{x}$ est dit *solution aux moindres carrés du système.*
Dans ce cas particulier où A est un vecteur colonne comme b, l'interprétation géométrique du résultat est simple. Posons tout d'abord pour « homogénéiser » les notations $a = A$, puis définissons le vecteur

$$p = \overline{x}a = \frac{a^t b}{a^t a}$$

et enfin, calculons le carré de la longueur du vecteur $b - p$:

$$\begin{aligned} \|b - p^2\| &= (b - \overline{x}a)^t (b - \overline{x}a) = (b^t - \overline{x}a^t)(b - \overline{x}a) \\ &= b^t b - 2\overline{x}a^t b + \overline{x}^2 a^t a \\ &= b^t b - 2\frac{(a^t b)^2}{a^t a} + \frac{(a^t b)^2}{(a^t a)^2}(a^t a) \\ &= b^t b - \frac{(a^t b)^2}{a^t a} = \frac{b^t b\, a^t a - (a^t b)^2}{a^t a} \end{aligned}$$

Si ensuite nous calculons

$$\|p^2\| = \|\overline{x}a\| = \overline{x}^2 a^t a = \frac{(a^t b)^2}{a^t a}$$

nous pouvons constater que

$$\|b - p^2\| + \|p^2\| = \|b^2\|$$

ce qui n'est autre que le théorème de Pythagore : p est donc la projection orthogonale du vecteur b sur le vecteur a, c'est-à-dire sur l'espace colonne de la matrice A (ou a). D'où la figure :

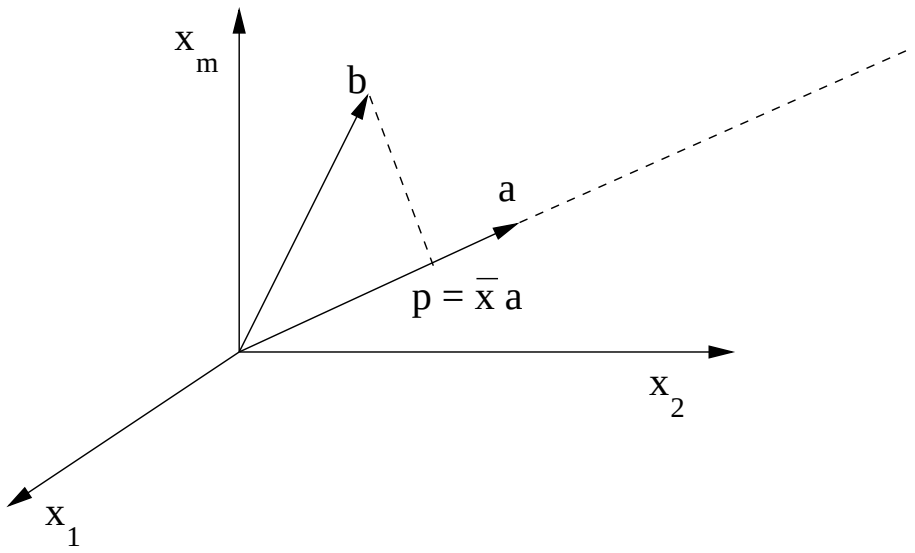

Figure 4.1. Interprétation géométrique des moindres carrés ; cas d'une matrice 3×1.

Remarquons enfin que la norme de $b - p$ peut également s'écrire

$$\|b - p\|^2 = \frac{\|b\|^2\|a\|^2 - (a^t b)^2}{\|a\|^2}$$

ce qui donne, puisque le premier membre est positif, la relation

$$\|b^2\|\|a^2\| - (a^t b)^2 \geq 0$$

qui n'est autre que l'inégalité de Schwarz.

Nous venons donc de monter, dans le cas particulier de cet exemple que p est la projection orthogonale de b définissant $\overline{x}$ de manière unique.

Il nous reste à généraliser tout cela et ce sont les théorèmes de base sur les espaces de Hilbert qui vont nous le permettre.

Les solutions aux moindres carrés d'un système surdéterminé dans le cas général.

Dans le paragraphe précédent, nous avons développé deux exemples permettant d'illustrer les concepts que nous voulons utiliser. Nous reprenons maintenant le problème dans sa généralité.

Position du problème :

Soit un système linéaire

$$Ax = b \quad \text{où } A \text{ est une matrice à } m \text{ lignes et } n \text{ colonnes, avec } m > n$$

Définissons comme dans les exemples précédents l'écart associé à ce système par

$$E(x) = \|Ax - b^2\|$$

Cet écart n'est autre, que le carré de la distance du point b de $\mathbb{R}^m$ au point Ax de l'espace image de A (espace colonne).

Si nous voulons pouvoir étendre les résultats précédents, il nous faut nous assurer qu'il existe un point unique $\overline{x}$ pour lequel cette distance passe par un minimum. Ce théorème d'existence et d'unicité nous est donné par la théorie des espaces de Hilbert. Bien qu'il ne soit pas difficile à démontrer (c'est l'un des premiers théorèmes que l'on montre dans cette théorie), il sort du cadre de cette étude. Aussi nous nous contenterons de l'énoncer sans le démontrer, mais nous le commenterons.

Rappelons tout d'abord qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et que la topologie induite par ce produit scalaire en fait un espace complet. On montre alors que les espaces de dimension finie sont des espaces de Hilbert fermés.

Le théorème qui nous intéresse s'écrit alors en toute sa généralité :

THÉORÈME :

Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors, pour tout x appartenant à H, il existe un unique élément a de F tel que

i) $x - a$ *est orthogonal à* F,

ii) *et* $\|x - a\| = \inf_{b \in F} \|x - b\|$

Donc, dans l'étude des systèmes linéaires que nous avons entreprise, tous les espaces sont des espaces de Hilbert et nous pouvons leur appliquer le théorème ci-dessus qui nous permet d'affirmer

- que le point $A\overline{x} = p$ existe et est plus proche du point b que n'importe quel point de l'espace colonne (image) de A ;
- qu'il est unique ;
- et que $A\overline{x} - b$ est orthogonal à tout point de l'espace colonne (donc à l'espace colonne).

La dernière propriété peut s'écrire de façon différente en utilisant la définition d'un élément quelconque de l'espace colonne de A :

pour tout y de $\mathbb{R}^n$, $A\overline{x} - b$ est orthogonal à Ay

soit aussi

pour tout y de $\mathbb{R}^n$, $(Ay)^t(A\overline{x} - b) = 0$

et encore

pour tout y de $\mathbb{R}^n$, $y^t(A^tA\overline{x} - A^tb) = 0$

La dernière assertion, étant vraie pour tout y, est en particulier vraie pour $y = A^tA\overline{x} - A^tb$. Elle entraîne donc :

$$y^t(A^tA\overline{x} - A^tb) = 0$$

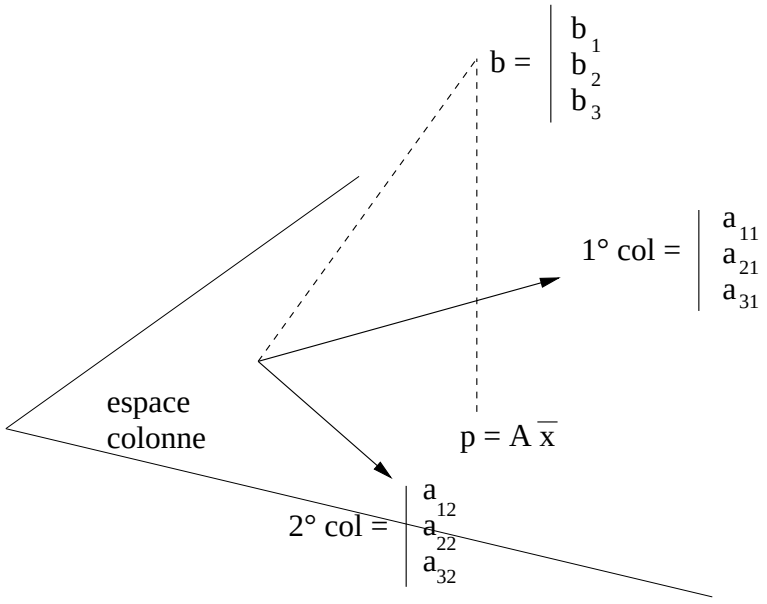

Figure 4.2. Le théorème des projections illustré dans le cas d'une matrice 3 lignes et 2 colonnes

Nous retrouvons donc les formules des exemples précédents. La signification géométrique est la même comme le montre la figure suivante. Si nous savons inverser A^tA le problème sera résolu. Ce sont les conditions d'une telle inversion que nous allons examiner maintenant.

Condition suffisante pour le calcul d'une solution aux moindres carrés.

THÉORÈME :

Soit le système $Ax = b$ *où* A *est une matrice* $m \times n$ *avec* $m > n$.
On appelle système normal *associé au système précédent, le système*

$$A^tA\overline{x} = A^tb$$

Si les colonnes de A *sont indépendantes, alors*
- A^tA *est inversible* [17],
- *l'unique solution aux moindres carrés est* $\overline{x} = (A^tA)^{-1}A^tb$,
- *la projection de* b *sur l'espace colonne est* $p = A\overline{x} = A(A^tA)^{-1}A^tb$

DÉMONSTRATION :

• Commençons par remarquer que, d'après les règles de multiplication, la matrices A^tA est une matrice $n \times n$. Elle est donc carrée et a le même nombre de colonnes que la matrice A.

• Par ailleurs, les matrices A^tA et A ont le même rang, et, pour démontrer cette propriété, il suffit de démontrer qu'elles ont le même noyau, le *théorème du rang* nous disant en effet que :

$$\text{rang} + \text{dimension du noyau} = \text{nombre de colonnes}$$

et nous venons de voir qu'elles ont le même nombre de colonnes. Démontrons cette propriété

La propriété $x \in \mathcal{N}(A)$ équivaut à $Ax = 0$ qui entraîne $A^tAx = 0$ et donc que $x \in \mathcal{N}(A^tA)$.

Réciproquement $x \in \mathcal{N}(A^tA)$ équivaut à $A^tAx = 0$ qui entraîne $x^tA^tAx = 0$, soit $\|Ax^2\| = 0$ qui entraîne à son tour $Ax = 0$, et donc $x \in \mathcal{N}(A)$. En conclusion :

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^tA)$$

• Enfin, si les n colonnes de A sont indépendantes, A est de rang n. Donc A^tA est une matrice $n \times n$ symétrique, de rang n : elle est donc inversible. Ce qui achève la démonstration.

---

[17] Insistons, à cette occasion, sur le fait que, si A est une matrice rectangulaire, ni A, ni A^t ne peuvent avoir d'inverse ; par contre, A^tA, qui est par construction une matrice carrée peut très bien avoir un inverse ; c'est évidemment de ce dernier qu'il s'agit dans ce théorème ; il s'écrit alors $(A^tA)^{-1}$ et est irréductible par rapport à A.

REMARQUES :

- La matrice $B \equiv (A^tA)^{-1}A^t$ de la définition de $\overline{x}$ est l'une des matrices inverses à gauche de A. En effet :

$$BA = (A^tA)^{-1}A^tA = I$$

Son existence était garantie par le fait que les colonnes de A sont indépendantes (cf. dans le chapitre sur les espaces vectoriels associés aux matrices, le théorème sur l'existence des matrices inverses).

- Si b se trouve effectivement *dans* l'espace colonne, la projection de b sur cet espace se simplifie puisqu'alors il existe un x tel que $Ax = b$. Dans ces conditions :

$$p = A(A^tA)^{-1}A^tb = A(A^tA)^{-1}A^tAx = Ax = b$$

Le point le plus proche de b dans l'espace colonne est b lui-même, comme nous pouvions nous y attendre.

- Supposons enfin que b est orthogonal à toutes les colonnes de A, autrement dit b est orthogonal à $Im(A)$. Dans ces conditions la projection de b ne peut être que l'origine. Calculons en effet dans ce cas $\overline{x}$. Les colonnes de A sont les lignes de A^t et donc $A^tb = 0$ puisque b est orthogonal à chaque ligne de A^t. Dons

$$\overline{x} = (A^tA)^{-1}A^tb = 0 \quad \text{et} \quad p = A\overline{x} = 0$$

ce qui démontre la propriété.

EXEMPLE D'APPLICATION : MOINDRES CARRÉS ET RELATIONS LINÉAIRES :

Supposons que les résultats d'une expérience dépendent, disons, du temps par le biais d'une loi qui s'écrit :

$$y = c + dt$$

Une série de mesures va, dans ces conditions, fournir une famille de relation du type :

$$\begin{aligned} c + dt_1 &= y_1 \\ c + dt_2 &= y_2 \\ \cdots \quad &\cdots = \cdots \\ c + dt_m &= y_m \end{aligned}$$

Si les mesures fournissaient des résultats exacts, il n'y aurait aucun problème : deux équations quelconque choisies dans la collection ci-dessus donneraient les *mêmes* valeurs de c et de d. Mais comme des erreurs s'introduisent, le système ci-dessus devient surdéterminé. Mettons le sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{ce qui définit} \quad Ax = b$$

Comme dans les premiers exemples, nous pourrions calculer la solution au moindres carré en minimisant l'écart

$$E = \|b - Ax^2\| = (y_1 - c - dt_1)^2 + \cdots + (y_m - c - dt_m)^2$$

et c'est un bon exercice que de le faire. Mais le résultat nous est bien sûr donné en appliquant le théorème précédent. Notons

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{pmatrix}$$

la solution du système $A^tAx = A^tb$. C'est la solution unique aux moindres carrés cherchée puisque la matrice A du système ci-dessus est à colonnes indépendante A. De façon explicite,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \\ 1 & t_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix}$$

$$A^tb = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i y_i \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système :

$$\begin{pmatrix} m & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i y_i \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui aura toujours une solution unique quelles que soient les données qu'on lui fournit. L'interprétation n'aura donc de sens que si la loi étudiée est proche d'une loi linéaire.

Matrices de projection.

Les calculs précédents ont introduit le *point de l'espace image* le plus proche de b par une formule

$$p = A(A^tA)^{-1}A^tb$$

qui exprime sous forme matricielle la construction géométrique de la perpendiculaire de b sur $\mathcal{I}m(A)$, l'espace image ou l'espace colonne de A. La matrice qui décrit cette opération s'appelle *matrice de projection*. Posons :

$$P = A(A^tA)^{-1}A^t$$

Avec ces notations, $p = Pb$ est la composante de b dans l'espace colonne $\mathcal{I}m(A)$, et l'erreur

$$b - A\overline{x} = b - Pb = (I - P)b$$

est sa composante dans le complément orthogonal de $\mathcal{I}m(A)$.

Propriétés de ces matrices :

- *La matrice* $P = A(A^tA)^{-1}A^t$ *possède les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{ll} (i) & P^2 = P \quad \textit{idempotence} \\ (ii) & P^t = P \quad \textit{symétrie} \end{array}$$

Il en est de même de $I - P$.

La démonstration de ces propriétés n'est qu'une suite de calculs sans difficultés :

– $$\begin{aligned} P^2 &= A(A^tA)^{-1}A^t\,A(A^tA)^{-1}A^t \\ &= A(A^tA)^{-1}A^t = P \end{aligned}$$

– $$\begin{aligned} P^t &= \left[A(A^tA)^{-1}A^t\right]^t \\ &= A^{tt}\left[(A^tA)^{-1}\right]^t A^t \quad \text{d'après les propriétés} \\ &= A\left[(A^tA)^t\right]^{-1} A^t \quad \text{de la transposition} \\ &= A(A^tA)^{-1}A^t = P \end{aligned}$$

– $$\begin{aligned} (I-P)^2 &= (I-P)(I-P) = I^2 - 2P + P^2 \quad \text{car} \quad [P,I] = 0 \\ &= I - 2P + P = I - P \end{aligned}$$

– $$(I-P)^t = I^t - P^t = I - P$$

- *Les projections* Pb *et* $(I-P)b$ *sont orthogonales.*

Le produit scalaire de ces deux vecteurs s'écrit en effet :

$$[(I-P)b]^t\,Pb = b^t(I-P)^tPb = b^t(I-P)Pb = b^t(P-P^2)b = b^t(P-P)b = 0$$

Les propriétés ci-dessus se retrouvent avec d'autres matrices, ce qui impose de généraliser ces notions :

Définition :

Toute matrice Π *possédant les propriétés*
- *d'idempotence* ($\Pi^2 = \Pi$),
- *de symétrie* ($\Pi^t = \Pi$)

est dite matrice de projection.

Matrices à colonnes orthogonales, matrices à colonnes orthonormées.

Définitions :

Une matrice est dite à colonnes orthogonales si les vecteurs associés à ses colonnes sont orthogonaux. Elle est dite à colonnes orthonormées si les vecteurs associés à ses colonnes sont orthonormés.

REMARQUES :

- Si A est à colonnes orthonormées, alors $A^tA = I_n$ où I est la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$.

Cette propriété est évidente, elle peut être schématisée de la façon suivante :

$$A^tA = \begin{pmatrix} \cdots & a_1^t & \cdots \\ \cdots & a_2^t & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_n^t & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \vdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = I_n$$

- Si les colonnes sont simplement orthogonales, A^tA est simplement une matrice diagonale $n \times n$.
- Si A est à colonnes orthogonales, les colonnes sont indépendantes puisque les vecteurs associés le sont. Son rang est alors n et satisfait à $m \geq n$ puisque chaque vecteur colonne possède m composantes et que dans $\mathbb{R}^m$ il ne peut y avoir plus de m vecteurs linéairement indépendants.
- En corollaire, étant donné un système linéaire $Ax = b$, nous avons vu que si les colonnes de A sont linéairement indépendantes, il existait une unique solution aux moindres carrés du système normal associé,

$$A^tA\overline{x} = A^tb$$

définie par $\overline{x} = (A^tA)^{-1}A^tb$, la projection de b sur l'espace colonne ($\mathcal{I}m(A)$) étant définie par $p = Pb = A\overline{x} = A(A^tA)^{-1}A^tb$. Si a est une matrice à colonnes orthonormées, $A^tA = I$ et les résultats précédents se simplifient en :

$$\overline{x} = A^tb\,; \quad p = A\overline{x} = AA^tb$$

DÉFINITION :

Une matrice orthogonale est une matrice carrée à colonnes orthonormées.

COROLLAIRE :

Soit Q une matrice orthogonale, elle est alors inversible, et

$$Q^tQ = QQ^t = I$$

En effet, le rang de Q est n, la matrice étant carrée, elle est inversible. De plus, et $Q^tQ = I$, Q^t est donc inverse à gauche ; la matrice étant inversible, il est aussi inverse à droite (théorème sur l'existence des inverses), et donc $Q^tQ = QQ^t = I$.

REMARQUE :

Si Q est une matrice carrée à colonnes orthonormées, ses lignes sont également orthonormées. En effet, d'après la relation ci-dessus, Q^t est à colonnes orthogonales.

Conséquence :

Si A est une matrice orthogonale, le système $Ax = b$ admet une solution et une seule définie par

$$x = A^t b$$

En effet, A est inversible et $A^t = A^{-1}$.

Propriété :

Les matrices orthogonales préservent produit scalaire et longueur.
Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$ et soit Q une matrice orthogonale sur $\mathbb{R}^n$. L'égalité :

$$(Qx)^t(Qy) = x^t Q^t Q y = x^t y$$

montre que le produit scalaire est conservé. Pour la conservation de la longueur, il suffit de remplacer y par x dans la relation ci-dessus.

La décomposition de Gram-Schmidt.

L'intérêt des paragraphes précédents résident dans le théorème qui suit et qui est une sorte de "pendant" de la décomposition $A = LU$.

Théorème :

Toute matrice $m \times n$ à n colonnes indépendantes (c'est-à-dire de rang n) peut se factoriser sous la forme :

$$A = QR \quad \text{où}$$

- *Q est une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont orthonormées ou orthogonales,*
- *R est une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure inversible.*

Si A est une matrice carrée, il en est de même pour la matrice Q qui sera soit à colonnes orthonormées, soit orthogonale.

Remarque :

Les colonnes de Q sont liées par les $C_n^2 = n(n-1)/2$ relations d'orthogonalité. La matrice Q contient donc $mn - n(n-1)/2$ paramètre indépendants ; la matrice triangulaire R en contient $n(n+1)/2$. Au total il y a donc $mn + n$ inconnues dans le membre de droite de la relation $A = QR$ à déterminer en fonction des mn du membre de gauche.

Il y aura donc n paramètres indéterminés. Il sera possible des les fixer en imposant par exemple

- soit que les colonnes de Q sont orthonormées ;
- soit que la diagonale de R est composée de 1 ;
- soit n relation quelconques...

Pour chacune de ces conditions, la décomposition sera unique.

Pour bien souligner les conséquences de tels choix, effectuerons la démonstration de ce théorème en choisissant successivement les deux premières conditions.

DÉMONSTRATION :

Le principe de la démonstration est simple : les colonnes de la matrice A

$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n$$

étant indépendantes, forment un système libre que nous allons orthogonaliser par le procédé dit d'*orthogonalisation de Schmidt*. Nous noterons de manière analogue à celles de A les colonnes de Q.

- **Première méthode : les colonnes de Q seront orthonormées.**

Posons :

$$a^{(1)} = r_{11} q^{(1)}$$

ce qui donne d'après les hypothèses choisies :

$$(a^{(1)}, a^{(1)}) = r_{11}^2 (q^{(1)}, q^{(1)}) = r_{11}^2 \quad \text{et donc} \quad r_{11} = \sqrt{(a^{(1)}, a^{(1)})} = \|a^{(1)}\|$$

r_{11} est donc déterminé au signe près, puis $q^{(1)}$ d'après la première équation. Par la suite, nous choisirons, toutes les fois qu'elles apparaîtrons, la valeur positive lors du calcul d'une racine carrée.

Posons ensuite pour déterminer $q^{(2)}$

$$a^{(2)} = r_{12} q^{(1)} + r_{22} q^{(2)}$$

La multiplication scalaire par $q^{(1)}$ et les conditions de normalisation donnent immédiatement :

$$r_{12} = (q^{(1)}, a^{(2)})$$

Le vecteur $r_{22} q^{(2)}$ est alors parfaitement déterminé par :

$$r_{22} q^{(2)} = a^{(2)} - r_{12} q^{(1)}$$

$r_{22} q^{(2)}$ s'obtient en élevant au carré scalaire la relation ci-dessus :

$$r_{22}^2 = (a^{(2)} - r_{12} q^{(1)})^2 = a^{(2)\,2} - 2 r_{12} (q^{(1)}, a^{(2)}) + r_{12}^2$$

D'où r_{22}. Remarquons que r_{22} n'est jamais nul, car autrement nous aurions $a^{(2)} = r_{12} q^{(1)}$ et $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$ ne seraient pas indépendants.

La méthode de construction se poursuit. Le vecteur $q^{(3)}$ est définit par

$$a^{(3)} = r_{13} q^{(1)} + r_{23} q^{(2)} + r_{33} q^{(3)}$$

Des conditions

$$(q^{(1)}, q^{(3)}) = 0 \quad \text{et} \quad (q^{(2)}, q^{(3)}) = 0$$

se déduisent

$$r_{13} = (q^{(1)}, a^{(3)}) \; ; \quad r_{23} = (q^{(2)}, a^{(3)})$$

et
$$r_{33} q^{(3)} = a^{(3)} - r_{13} q^{(1)} - r_{23} q^{(2)}$$

dont il ne reste plus qu'à calculer la norme pour déterminer r_{33}, puis $q^{(3)}$ en tenant compte de $(q^{(3)}, q^{(3)}) = 1$.

Le procédé se poursuit pour donner finalement

$$a^{(n)} = r_{1n} q^{(1)} + \cdots r_{nn} q^{(n)}$$

où $r_{in} = (q^{(i)}, a^{(n)})$ et où $q^{(n)}$ est orthogonal à tous les $q^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ et normé à 1.

En résumé, nous avons les relations :

$$\begin{aligned}
a^{(1)} &= r_{11} q^{(1)} \\
a^{(2)} &= r_{12} q^{(1)} + r_{22} q^{(2)} \\
a^{(3)} &= r_{13} q^{(1)} + r_{23} q^{(2)} + r_{33} q^{(3)} \\
&\cdots \\
a^{(n)} &= r_{1n} q^{(1)} + r_{2n} q^{(2)} + r_{3n} q^{(3)} + \cdots + r_{nn} q^{(n)}
\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que celles exposées ci-dessus, aucun des r_{ii} n'est nul.

Si maintenant, nous définissons les composantes de $q^{(i)}$ par

$$q^{(i)} = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{mi} \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

et la matrice Q par

$$Q = [\, q_{ji} \,]$$

le système ci-dessus n'exprime rien d'autre que

$$A = QR$$

où Q est une matrice $m \times n$ à colonnes orthonormées par construction et où

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

est une matrice $n \times n$ à éléments diagonaux non nuls (autrement, les $a^{(i)}$ ne seraient pas indépendants).

APPLICATION : RÉSOLUTION AUX MOINDRES CARRÉS DU SYSTÈME $Ax = b$.

Nous supposons de plus que A est une matrice $m \times n$ avec $m > n$ (pour que la méthode des moindres carrés ait un sens) et que et que ses colonnes sont indépendantes (pour que nous soyons dans les hypothèses du théorème ci-dessus).

A peut alors se décomposer sous la forme $A = QR$ et la solution aux moindres carrés s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \left(A^t A\right)^{-1} A^t b \\ &= \left(R^t Q^t Q R\right)^{-1} R^t Q^t b \\ &= \left(R^t R\right)^{-1} R^t Q^t b \quad \text{puisque} \quad Q^t Q = I \\ &= R^{-1} \left(R^t\right)^{-1} R^t Q^t b = R^{-1} Q^t b\end{aligned}$$

Si donc nous disposons de la décomposition $A = QR$, au lieu d'inverser $A^t A$, il suffit d'inverser une matrice triangulaire supérieure.

- **Seconde méthode : la diagonale de la matrice triangulaire est composée de** 1.

Les colonnes de la matrice calculée dans la décomposition sont supposée maintenant être simplement orthogonales. Pour éviter toute ambiguïté, nous parlerons dans ce cas de décomposition $A = KS$ où S est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité. La démonstration que nous avons déjà faite peut être reprise ligne par ligne.

Posons

$$a^{(1)} = k^{(1)}$$

ce qui définit parfaitement $k^{(1)}$, puis

$$a^{(2)} = s_{12} k^{(1)} + k^{(2)}$$

La condition $(k^{(1)}, k^{(2)}) = 0$ fournit $s_{12} = (k^{(1)}, a^{(2)})$, ce qui définit $k^{(2)} = a^{(2)} - s_{12} k^{(1)}$.

$k^{(3)}$ se définit par :

$$a^{(3)} = s_{13} k^{(1)} + s_{23} k^{(2)} + k^{(3)}$$

avec les conditions $(k^{(1)}, k^{(3)}) = 0$ et $(k^{(2)}, k^{(3)}) = 0$ dont se déduisent $s_{13} = (k^{(1)}, a^{(3)})$, $s_{23} = (k^{(2)}, a^{(3)})$, puis $k^{(3)}$.

Finalement, nous obtiendrons

$$a^{(n)} = s_{1n} k^{(1)} + s_{2n} k^{(2)} + \cdots + s_{n-1,n} k^{(n-1)} + k^{(n)}$$

où $k^{(n)}$ est orthogonal à tous les $k^{(i)}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et où $s_{in} = (k^{(i)}, a^{(n)})$.

En définissant

$$k^{(i)} = \begin{pmatrix} k_{1i} \\ \vdots \\ k_{mi} \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

et la matrice $K = [\, k_{ji} \,]$, le système ci-dessus :

$$\begin{aligned}
a^{(1)} &= s_{11}k^{(1)} \\
a^{(2)} &= s_{12}k^{(1)} + s_{22}k^{(2)} \\
a^{(3)} &= s_{13}k^{(1)} + s_{23}k^{(2)} + k^{(3)} \\
&\dots \\
a^{(n)} &= s_{1n}k^{(1)} + s_{2n}k^{(2)} + s_{3n}k^{(3)} + \dots + k^{(n)}
\end{aligned}$$

peut s'écrire sous la forme

$$A = KS$$

où K est, par construction une matrice $m \times n$ à colonnes orthogonales et où

$$S == \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ 0 & 1 & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice triangulaire supérieure, à diagonale unité, et qui est donc inversible.
Le calcul de la décomposition est plus simple, puisqu'il n'y a pas à normer les colonnes. Par contre, cette simplicité se perd lors de la résolution proprement dite aux moindres carrés du système $Ax = b$. En effet, nous pouvons toujours écrire :

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \left(A^t A\right)^{-1} A^t b \\
&= \left(S^t K^t K S\right)^{-1} S^t K^t b
\end{aligned}$$

mais $K^t K$ n'est plus ici l'identité, mais une matrice diagonale Δ_n qui contient les valeurs des normes des vecteurs :

$$\overline{x} = S^{-1}\Delta_n^{-1}\left(S^t\right)^{-1} S^t K^t b = S^{-1}\Delta_n^{-1} K^t b$$

ce qui est un peu plus « lourd ».

Attention : $S^{-1}\Delta_n^{-1} \neq \Delta_n^{-1} S^{-1}$, même lorsqu'une matrice est diagonale, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma \\ a'\alpha & b'\beta & c'\gamma \\ a''\alpha & b''\beta & c''\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha \\ a'\beta & b'\beta & c'\beta \\ a''\gamma & b''\gamma & c''\gamma \end{pmatrix}$$

Du même auteur et dans la même collection

FASCICULE i – Systèmes linéaires. Une introduction à l'algèbre linéaire.

FASCICULE ii – (TAP 1) Présentation du cours.

FASCICULE iii – (TAP 2) Analyse numérique et Ordinateurs.

FASCICULE iv – (TAP 3) Extrema et Différentielles.

FASCICULE v – (TAP 4) Calcul des variations.

FASCICULE vi – (TAP 5) Formes quadratiques et Opérateurs associés.

FASCICULE vii – (TAP 6) Principes variationnels pour des systèmes de dimension finie.

FASCICULE viii – (TAP 7) Méthodes 1.

FASCICULE ix – (TAP 8) Méthodes 2.

FASCICULE x – Étude et tracé des courbes du type $f(x, y) = 0$.