

Rotations, Géométrie et Calculs

Application à un problème de Mécanique

MICHEL KARATCHENTZEFF

Fondation Louis de Broglie, 23, rue Marsoulan, 75012 Paris, France
(20 novembre 2008 – version 2.0)

RÉSUMÉ. Nous proposons dans cette étude d'exposer d'abord des rappels sur la notion de rotation [1] du point de vue de la Géométrie euclidienne puis de celui de la Géométrie analytique pour appliquer ensuite ces notions à un problème classique de Mécanique analytique du solide, celui du comportement d'une aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre.

SUMMARY. In this study, we intend first to expose some wellknown features about rotations [1] according to Euclidian and Analytical Geometry in order then to apply these notions to a classical problem of Analytical Mechanics (behaviour of a magnetic needle in the magnetic field of the Earth).

Introduction.

Le sujet de cette étude porte sur la géométrie et la mécanique du solide ; l'espace dans lequel nous travaillerons est donc un espace euclidien à trois dimensions ; il sera muni d'un repère et les notions d'orientation attachées à ce repère sont supposées connues.

QUELQUES RAPPELS SUR LA NOTION D'ANGLE.

Deux droites distinctes concourantes déterminent un plan et, dans ce plan (figure 1), quatre régions symétriques deux à deux par rapport à leur point d'intersection [(1) et (3) ; (2) et (4)].

Si nous considérons alors un cercle centré sur ce point d'intersection, nous pouvons associer à chaque région un nombre. Si ce nombre est proportionnel à la longueur de l'arc de cercle qu'il détermine¹, la constante de proportionnalité étant choisie de sorte que le demi-cercle de rayon unité a pour longueur π , nous dirons que ce nombre mesure l'angle en radians, angle qui est donc défini modulo π .

Dans ces conditions, si nous disposons de l'un des quatre nombres, les trois autres sont déterminés, toujours modulo π . En d'autres termes, ce nombre détermine la position des deux droites, l'une par rapport à l'autre et il est possible, étant donnée l'une des droites, de construire l'autre en utilisant, par exemple, la règle et le compas.

¹ Nous aurions pu choisir la surface du secteur circulaire correspondant.

Il est possible d'aller plus loin en choisissant une orientation dans le plan des deux droites et en convenant que l'angle est positif s'il est décrit dans le sens trigonométrique, négatif dans l'autre sens. L'angle est alors dit « orienté » et nous le noterons $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$ pour indiquer que, lorsque nous le décrivons, nous allons sur le cercle de A vers B en tournant dans le sens positif. L'introduction de vecteurs n'est utile que pour distinguer le sommet de l'angle de ses côtés ; on peut alors vérifier que cette notation satisfait à une « relation de Chasle » :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) \quad \text{ou encore} \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = 0$$

Ces différentes notions n'ont de sens que dans un plan, éventuellement orienté, et il nous faudra toujours nous ramener à ce plan si nous voulons les utiliser.

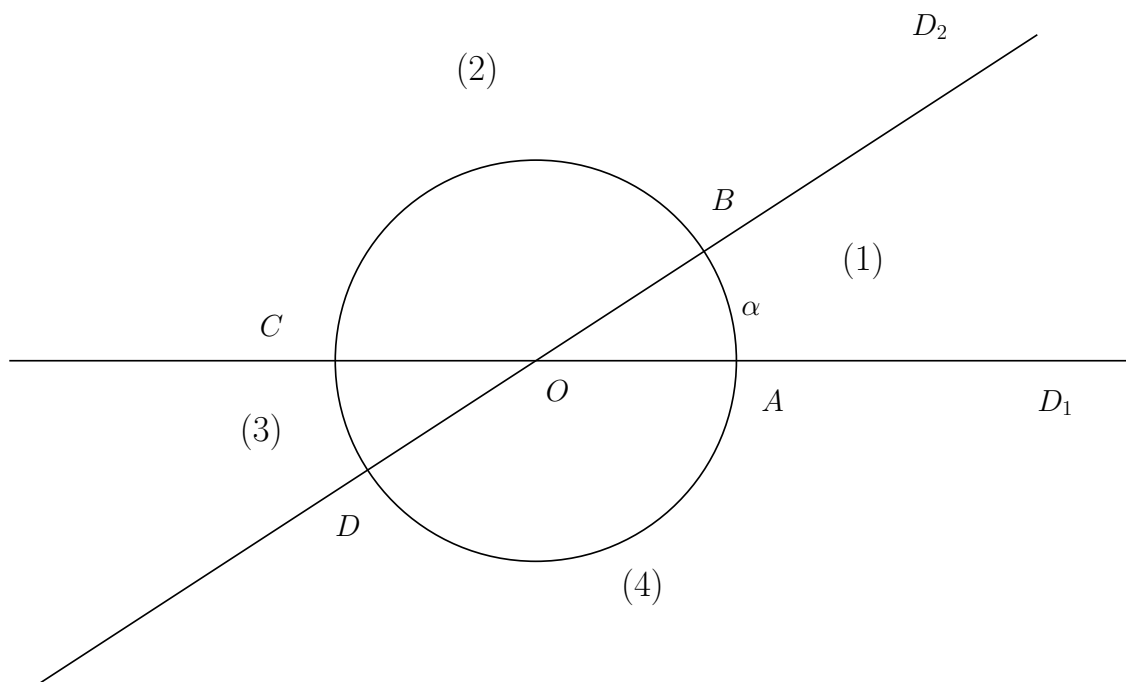


Figure 1. Si le rayon OA vaut 1, la longueur de l'arc AB détermine en radians l'angle du secteur circulaire OAB et nous le noterons \widehat{AOB} . Si nous utilisons les conventions du texte, l'angle orienté correspondant s'écrira : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$; α est défini modulo 2π . L'angle orienté correspondant au secteur circulaire BOC vaudra $\pi - \alpha$ (toujours modulo 2π).

Les rotations. Le point de vue géométrique.

Dans cette première partie, nous allons

- définir la notion de rotation autour d'un axe ;
- étudier quelques propriétés d'une rotation particulière, le demi-tour :
 - le demi-tour conserve les longueurs, autrement dit, en langage mathématique, c'est une isométrie² de \mathbb{R}^3 ;

² Les fondements des propriétés mathématiques dont nous parlons ici ont été volontairement laissés de côté, notre approche cherchant simplement à les introduire ; de nombreux ouvrages parlent de ces fondements, toutefois le lecteur intéressé les trouvera regroupés et démontrés dans une note [2] de Claude Piquet sur les isométries.

- le produit de deux demi-tours d'axes concourant est une rotation, qui devient de ce fait une isométrie ;
- le produit de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation, qui est donc, elle aussi, une isométrie ;
- revenir enfin aux rotations en montrant que le produit de deux rotations d'axes concourant est encore une rotation dont l'axe passe par le point de concours.

Précisons maintenant tout cela.

Nous dirons qu'un axe est une droite de l'espace sur laquelle un sens positif a été choisi. Si (D) symbolise la droite, nous désignerons par \overrightarrow{D} , l'axe qui aura été construit à partir de cette droite.

ROTATION AUTOUR D'UN AXE.

Soit \overrightarrow{z} un axe et α un nombre réel défini modulo 2π ; considérons la transformation qui, à tout point M de l'espace hors de l'axe, associe un point M' défini par les propriétés suivantes :

- Ω étant la projection orthogonale de M sur l'axe \overrightarrow{z} , M' est sur l'axe qui rend le trièdre $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{z})$ direct ;
- l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$ étant orienté à partir de ce trièdre vaut α , et les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ ont même norme :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\|$$

L'image M' est donc parfaitement définie à partir du couple $(\overrightarrow{z}, \alpha)$, mais il faut noter que le même point M' aurait pu être défini par le couple $(-\overrightarrow{z}, -\alpha)$.

Par définition, la transformation géométrique qui fait correspondre avec les règles ci-dessus M' à M , s'appelle une rotation.

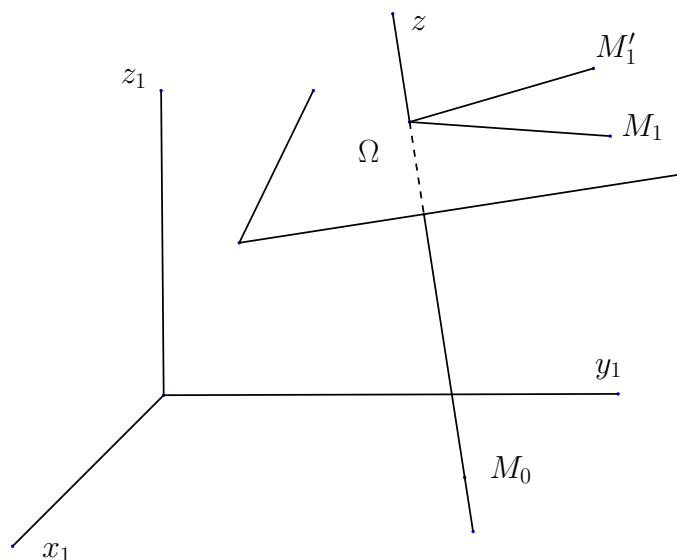


Figure 2. Rotation autour de l'axe \overrightarrow{z} d'angle α . Si M est un point quelconque hors de l'axe \overrightarrow{z} , son transformé M' se trouvera dans le plan passant par M , perpendiculaire à \overrightarrow{z} et qui coupe \overrightarrow{z} en Ω . Dans ce plan orienté, M' sera sur le cercle de centre Ω et de rayon ΩM de sorte que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$ algébriquement.

Cette définition est illustrée par la figure 2. L'axe de rotation est une droite orientée passant par un point M_0 . Il est défini dans un repère $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ qui impose une orientation à l'espace et donc impose le sens de la rotation.

LE DEMI-TOUR OU LA SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UNE DROITE.

Le demi-tour³ est une rotation particulière d'angle π . Du fait de cette définition, la notion d'orientation disparaît puisque, quel que soit le sens dans lequel on tourne, on arrive au même point, le symétrique par rapport à la droite du point d'où l'on est parti. Abusivement, nous parlerons cependant souvent d'axe du demi-tour.

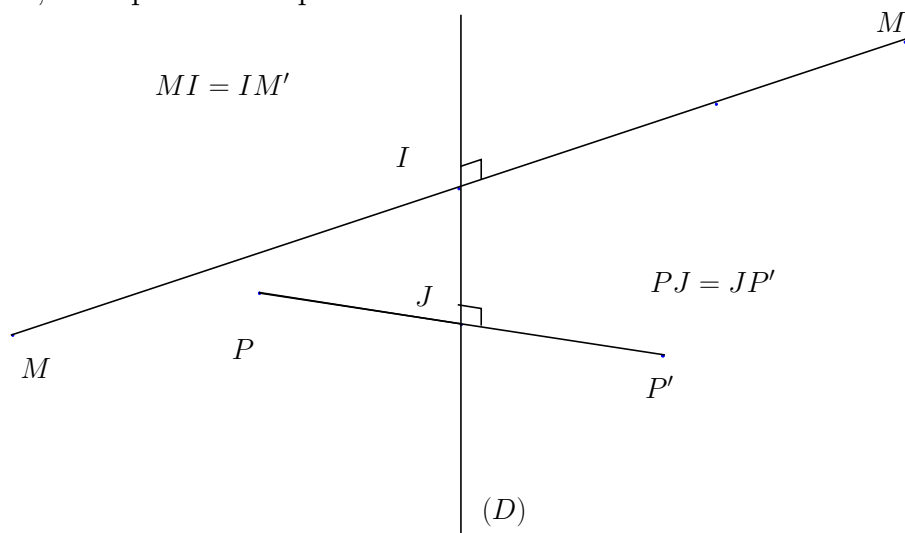


Figure 3. Le demi-tour se fait autour de la droite (D) . M' est le transformé de M et le segment MM' est orthogonal à (D) et coupe cette droite au milieu I de MM' ; il en est de même pour les points P et P' .

Le produit de deux demi-tours autour d'un même axe ramène le système à sa situation initiale; l'opération correspond donc à une identité et le demi-tour est son propre inverse, ce qui réduit le nombre d'éléments du groupe de transformations correspondant à deux.

Il est intuitif que le demi-tour conserve les longueurs, ce qui veut dire que la distance entre deux points quelconques, M et P par exemple, reste la même après la transformation; autrement dit, $MP = M'P'$. Et comme rien ne distingue un point de son inverse dans un demi-tour, nous avons tout aussi bien $MP' = PM'$.

Pour démontrer cette propriété, considérons un demi-tour autour d'une droite D , le plan passant par les points M et M' , ainsi que celui passant par P , P' et (D) . Nous obtenons ainsi un dièdre d'arête (D) dont nous n'avons représenté sur la figure 2 que la partie située entre les projections I et J de M et P sur (D) .

³ On trouve aussi comme dénomination dans la littérature *retournement* ou *transposition*, mais les deux expressions les plus employées sont *demi-tour* et *symétrie par rapport à une droite* ou *symétrie-droite*.

Considérons également la parallèle menée de J à MM' , ainsi que les projections m et m' sur cette droite des points M et M' . Les triangles mJP' et PJm' sont égaux (un angle égal compris entre deux côtés égaux), et donc $mP' = Pm'$.

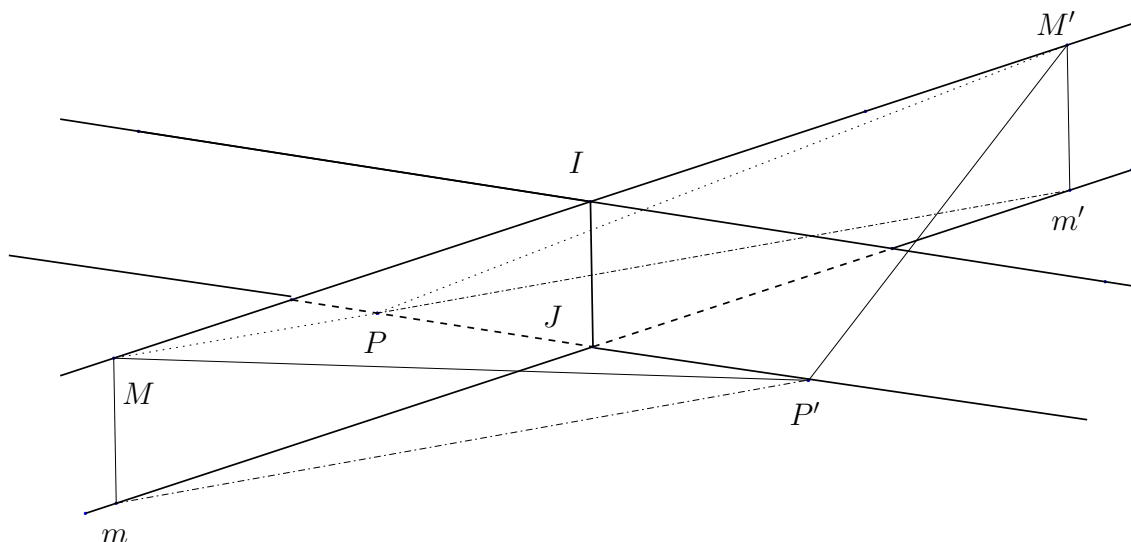


Figure 4. Le demi-tour conserve les longueurs.

Il s'ensuit que les triangles rectangles MmP' et $M'm'P$ sont égaux pour les mêmes raisons. et donc $MP' = M'P$. Ce qui achève la démonstration⁴.

Nous aurions aussi bien pu démontrer de la même façon que $MP = M'P'$.

DEMI-TOURS ET ROTATIONS.

Le produit de deux demi-tours peut engendrer une rotation ou à une translation. Par conséquent, il induira alors sur ces transformations la propriété de conservation de la longueur (isométrie).

Avant de démontrer ce théorème, rappelons que, dès qu'il s'agit de rotations, d'après les définitions que nous avons adoptées, les angles sont orientés. Le théorème suivant (figure 5) est classique :

⁴ Il existe une démonstration de géométrie analytique qui utilise le produit scalaire. Il suffit d'écrire de deux manières différentes le carré scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MP'}$ et $\overrightarrow{M'P}$. Nous obtenons en tenant compte de l'orthogonalité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP'}^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JP'})^2 = MI^2 + IJ^2 + JP'^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{JP'} \\ \overrightarrow{M'P}^2 &= (\overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JP})^2 = M'I^2 + IJ^2 + JP^2 + 2\overrightarrow{M'I} \cdot \overrightarrow{JP}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{M'I} = -\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JP'} = -\overrightarrow{JP}$, les deux seconds membres sont égaux, et donc les premiers le sont aussi :

$$\overrightarrow{MP'}^2 = \overrightarrow{M'P}^2 \quad \text{ou encore} \quad MP'^2 = M'P^2$$

THÉORÈME : *Le produit de deux demi-tours d'axes concourants définit une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan des axes des deux demi-tours, passant par leur point de rencontre et dont l'angle est le double de celui des axes. Réciproquement, toute rotation peut être considérée d'une infinité de manières comme le produit de deux demi-tours d'axes qui se rencontrent.*

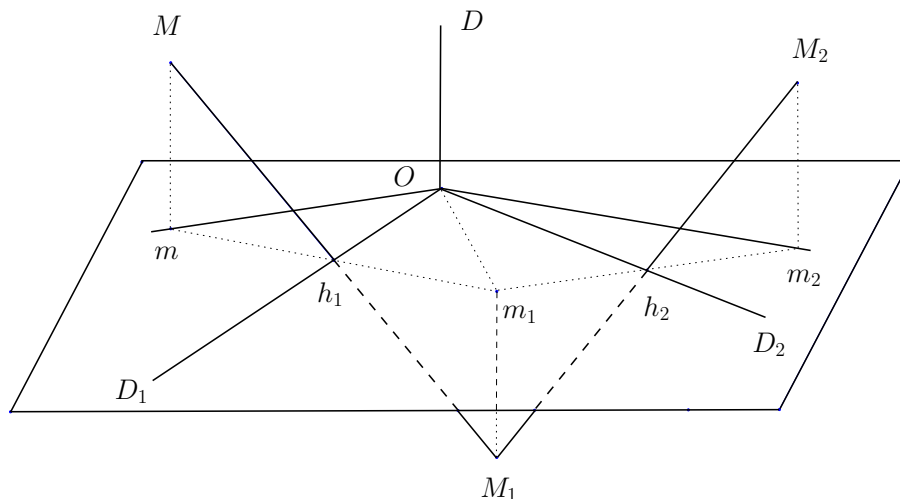


Figure 5. Demi-tours et rotation. L'angle $(\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{OD_2})$ que forment les axes des deux demi-tours est la moitié de celui de la rotation correspondant.

Considérons alors le plan des droites D_1 et D_2 , axes des demi-tours, qui se coupent en O ; et soit M un point quelconque de l'espace.

Soit M_1 l'image de M par le demi-tour autour de D_1 ; soit également m la projection de M sur le plan des droites D_1 et D_2 , et m_1 l'image de m par le demi-tour D_1 .

Les triangles Mmh_1 et $M_1m_1h_1$ ont deux côtés égaux ($Mh_1 = h_1M_1$ et $m_1h_1 = h_1m_1$ par définition du demi-tour) formant les côtés adjacents de deux angles égaux ($\widehat{Mh_1m} = \widehat{M_1h_1m_1}$ puisqu'ils sont opposés par le sommet). Les deux triangles sont donc égaux, ce qui veut dire en particulier que :

- les longueurs Mm et M_1m_1 sont égales ($Mm = M_1m_1$);
- le point m_1 est la projection du point M_1 sur le plan des droites D_1 et D_2 ;
- la droite Oh_1 est à la fois hauteur, médiane, médiatrice du triangle mOm_1 , donc est également bissectrice et $Om = Om_1$.

Le même raisonnement se répète pour le demi-tour autour de D_2 qui transforme M_1 en M_2 ; nous avons donc :

- les longueurs M_1m_1 et M_2m_2 sont égales ($M_1m_1 = M_2m_2$);
- le point m_2 est la projection du point M_2 sur le plan des droites D_1 et D_2 ;
- la droite Oh_2 est à la fois hauteur, médiane, médiatrice du triangle m_1Om_2 , donc est également bissectrice et $Om_1 = Om_2$.

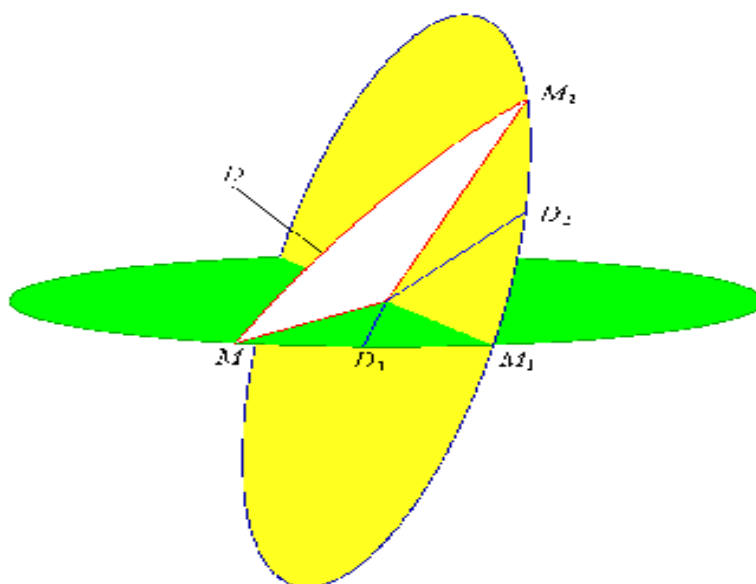


Figure 6. Demi-tours et rotation. Cette figure est la même que la figure 5, mais l'accent a été mis sur les angles en représentant les cercles trigonométriques associés aux plans dans lesquels s'effectuent les demi-tours. D_1 , D_2 et D ont la même signification dans les deux figures, celle des axes des demi-tours. D supporte l'axe de la rotation.

En conséquence,

- les points M et M_2 sont du même côté du plan $D_1 D_2$;
- si nous traçons une droite D perpendiculaire en O au plan $D_1 D_2$, M et M_2 sont à la même distance Om de D ;
- si α est l'angle entre les droites D_1 et D_2 , l'angle $\widehat{mOm_2}$ vaut 2α .

Si donc nous choisissons une orientation dans le plan, et par suite une orientation sur D , nous pouvons orienter l'angle précédent et dire que M_2 est l'image de M par une rotation d'axe D et d'angle $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Om_2}) = 2\alpha$.

Le produit de deux demi-tours d'axes concourants n'est pas commutatif (pour contre-exemple, il suffit de considérer l'image d'un point sur l'un des axes) : le produit de deux demi-tours dans l'ordre inverse correspond à la rotation inverse.

Réciproquement, si nous considérons une rotation d'axe D et d'angle β , il est toujours possible de choisir un point O sur cet axe et de construire une droite D_1 , perpendiculaire à D en O . Il nous suffit ensuite de construire une droite D_2 en faisant tourner D_1 autour de D d'un angle $\beta/2$. Nous avons reconstruit la figure 5 qui montre que la rotation considérée est égale au produit des deux demi-tours autour des axes que nous venons de définir.

Toute rotation peut donc être décomposée, d'une infinité de façons possibles, comme un produit de deux demi-tours. De plus, puisque le demi-tour conserve les distances, il en sera de même pour la rotation.

Ces propriétés sont également illustrées sur la figure 6 qui est essentiellement la même que celle de la figure 5 mais qui introduit des notations que nous utiliserons lors de l'étude des angles d'Euler.

DEMI-TOURS ET TRANSLATIONS.

Bien que cela soit légèrement hors sujet, il est intéressant d'appliquer le produit de deux demi-tours à la translation.

Soient donc deux droites parallèles D_1 et D_2 qui sont les supports des axes des demi-tours étudiés, et soit M un point quelconque de l'espace. Appelons M_1 le transformé de M par le demi-tour autour de D_1 et M_2 le transformé de M_1 par la translation autour de D_2 (figure 7).

Par définition des transformés, les droites MM_1 et M_1M_2 sont respectivement perpendiculaires aux droites D_1 et D_2 ; elles les coupent en h_1 et h_2 ; les points M, M_1, M_2, h_1, h_2 sont donc dans un même plan, le plan qui passe par M et qui est perpendiculaire aux deux droites; c'est ce plan qui est représenté sur la figure 7.

La droite h_1h_2 est donc la droite des milieux des côtés du triangle MM_1M_2 et la distance MM_2 est égale au double de h_1h_2 , distance entre les droites D_1 et D_2 .

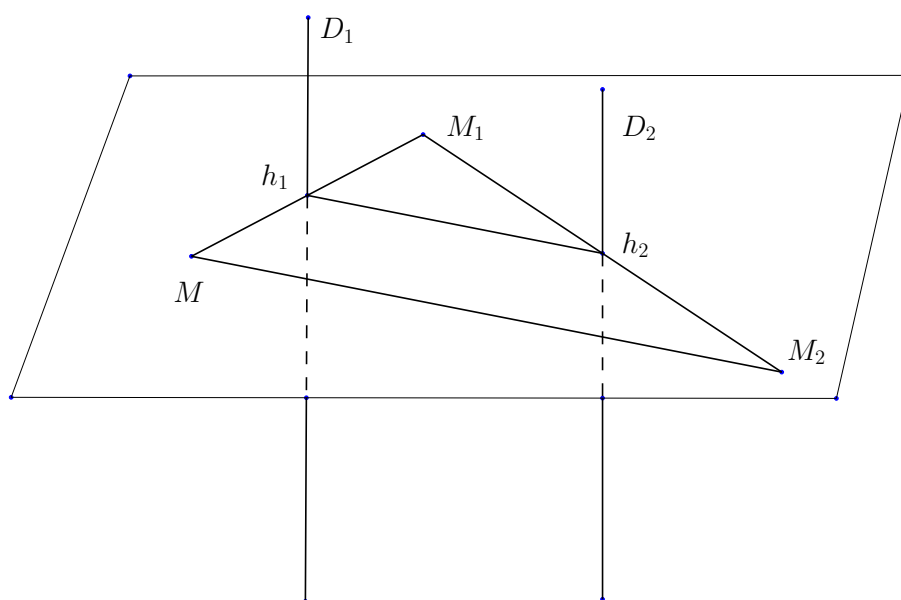


Figure 7. Demi-tours et translation.

Le produit des deux demi-tours peut donc s'interpréter également comme une translation dont le module est le double de la distance entre les deux droites, le sens étant celui qui va de D_1 vers D_2 et correspond à l'ordre dans lequel sont pris les demi-tours.

Remarquons que, comme dans le cas de la rotation, le produit de deux demi-tours d'axes parallèles n'est pas commutatif (pour contre-exemple, il suffit, à nouveau, de considérer l'image d'un point sur l'un des axes); qui plus est, si on change l'ordre dans le produit de deux demi-tours d'axes parallèles, on obtient la translation inverse (il suffit d'échanger h_1 et h_2).

Réciproquement, étant donnée une translation définie par un vecteur \vec{V} , il est toujours possible de construire une droite D_1 passant par un point arbitraire se trouvant dans un plan perpendiculaire à ce vecteur ; puis de construire la translatée D_2 de cette droite par la moitié du même vecteur. Ces deux droites, utilisées comme axes de demi-tour, permettent comme nous venons de le voir, de construire le translaté de n'importe quel point de l'espace.

Il est donc possible, et d'une infinité de manières, de considérer une translation comme un produit de deux demi-tours. Comme nous l'avons vu pour la rotation, nous pouvons en déduire, ce qui était évident, que la translation conserve les distances.

LE PRODUIT DE DEUX ROTATIONS D'AXES CONCOURANTS.

Ce cas illustre simplement ce que nous venons de démontrer. Une rotation étant le produit de deux demi-tours, le produit de deux rotations fait apparaître quatre demi-tours. Pour les lier, demandons-nous s'il est possible d'effectuer ces demi-tours en choisissant un axe commun aux deux rotations pour deux des demi-tours.

D'après ce que nous venons de voir sur les demi-tours et les rotations, un axe de demi-tour doit être perpendiculaire à l'axe de rotation. S'il est commun aux deux rotations, il doit être perpendiculaire aux deux axes. Une seule solution est alors possible : la droite perpendiculaire au point d'intersection des deux axes.

Plus précisément (figure 8), appelons \vec{z}_1 et \vec{z}_2 les axes de rotation, O le point d'intersection de ces axes. Et soit D_2 , la droite perpendiculaire en O à \vec{z}_1 et \vec{z}_2 .

Comme nous l'avons vu, il est toujours possible à partir de \vec{z}_1 et D_2 de construire une droite D_1 telle que la rotation autour de \vec{z}_1 soit égale au produit des deux symétries autour de D_1 , puis autour de D_2 ; il suffit pour cela de construire D_1 dans le plan perpendiculaire en O à \vec{z}_1 et dont l'angle avec D_2 soit la moitié de l'angle de la rotation.

La rotation autour de \vec{z}_2 pourra de même être remplacée par un demi-tour autour de D_2 suivie d'un demi-tour autour de D_3 , la droite D_3 étant construite dans le plan orthogonal en O à \vec{z}_2 et telle que son angle avec D_2 soit égal à la moitié de l'angle de la rotation autour de \vec{z}_2 .

Nous avons donc remplacé le produit des deux rotations autour de \vec{z}_1 , puis de \vec{z}_2 , par un produit de deux demi-tours, l'un autour de D_1 puis autour de D_2 , suivi d'un autre produit de deux demi-tours, l'un autour de D_2 , l'autre autour de D_3 .

Comme nous avons successivement dans cette suite d'opérations deux demi-tours effectués successivement autour de D_2 , leur composition correspond à une transformation identité, et le résultat global est donné par le produit d'un demi-tour autour de D_1 , suivi d'un demi-tour autour de D_3 .

D_1 et D_3 se coupant en O , le résultat correspond à une rotation autour d'un axe z , perpendiculaire en O à D_1 et à D_3 et dont l'angle est le double de celui des droites D_1 et D_3 .

Le produit de deux rotations autour de deux axes concourants est encore une rotation dont l'axe passe par le point d'intersection précédent.

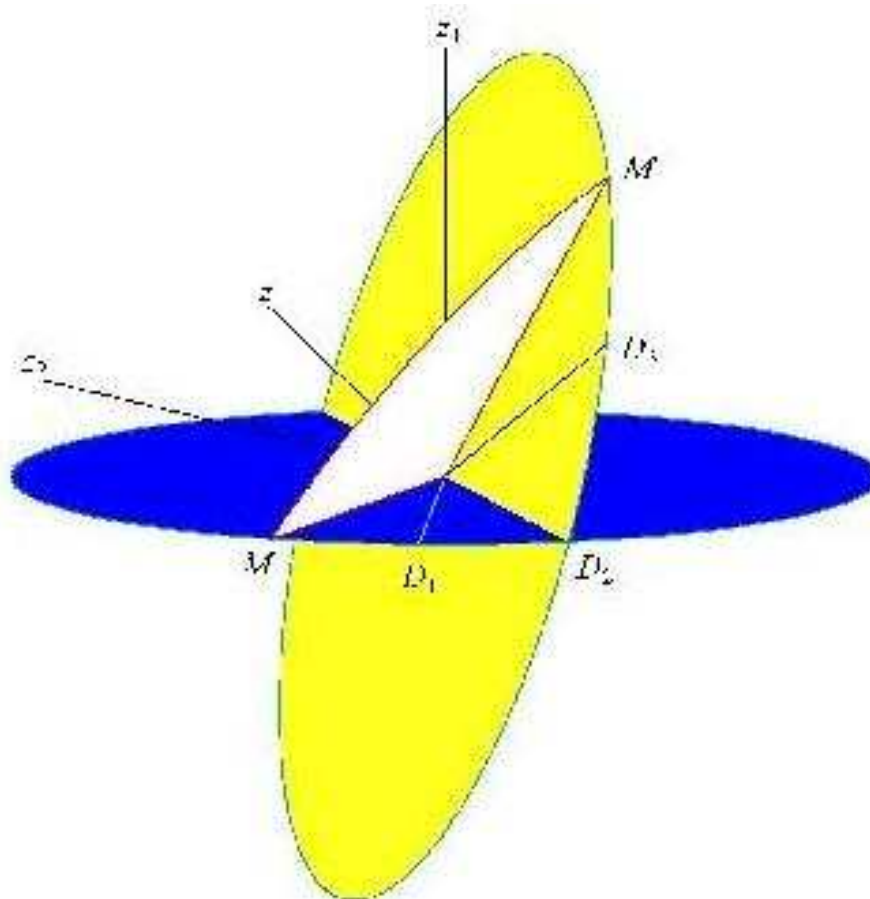


Figure 8. Produit de deux rotations.

Les rotations. Le point de vue du calcul.

Dans ce paragraphe, nous allons transcrire les résultats géométriques que nous venons de démontrer en formules algébriques plus adaptées à certains problèmes de Mécanique.

Comme nous passerons successivement de la géométrie euclidienne à la géométrie analytique, puis à la mécanique analytique, quelques remarques de langage s'imposent. Elles ne chercheront pas à justifier dans le détail les mots choisis, mais à les introduire.

L'espace du géomètre est celui qu'il a devant les yeux et qu'il décrit au moyen de concepts (point, droite, plan, projection, lieu géométrique, ...) ou qu'il construit avec des outils comme la règle et le compas. Le temps n'intervient pas et si l'on utilise des notions comme les « transformations », on peut considérer simplement les résultats de ces transformations ; le géomètre emploie alors un langage du type : le résultat d'un produit de deux translations

Il n'en est plus de même lorsqu'on passe à la géométrie analytique. Son utilisateur, que j'appelle le « calculateur », doit décrire l'espace par des formules le définissant point par point. Pour ce faire, il a admis que la notion de vecteur lui permettait d'en choisir

trois, concourants et tels qu'il pouvait repérer à partir de ces derniers n'importe quel point de l'espace. Ce triplé de vecteurs forme ce qu'on appelle une base d'un système de coordonnées ; elle permet au « calculateur » de décrire les objets que le géomètre a devant les yeux, et le domaine des mathématiques dans lequel il travaille est celui d'un espace euclidien à trois dimensions, puisqu'il a besoin d'une notion de projection.

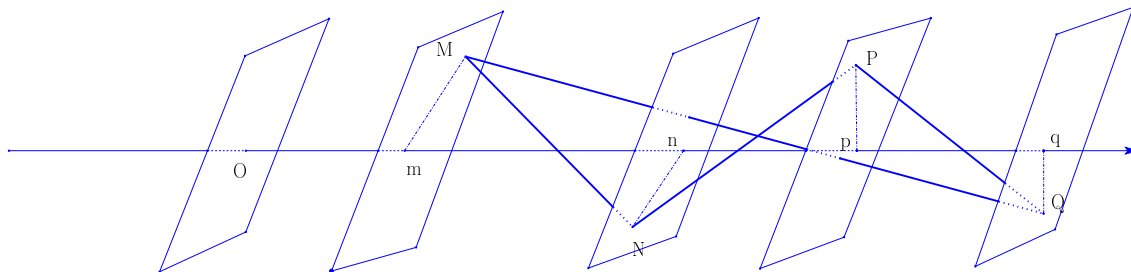


Figure 9. Projection sur un axe parallèlement à un plan de référence. Sur la figure, il passe par l'origine. M est un point quelconque, m est son projeté. Pour que la construction soit possible, il ne faut pas que l'axe soit dans le plan de référence. Si l'axe est orthogonal au plan de référence, la projection est alors dite orthogonale.

Jusque là, le temps n'intervient pas et l'espace, vu par l'observateur, qu'il soit géomètre ou calculateur, est statique. Tout change lorsque c'est un mécanicien qui cherche à utiliser cet espace pour décrire les mouvements qu'il étudie autour de lui ; il admet que les lois de la mécanique sont valables dans cet espace et au centre duquel il se tient et auquel il ajoute la notion de temps. Il appelle alors « repère » le système formé par la base de l'espace euclidien et par ses outils lui permettant de mesurer le temps. Il admet qu'il est immobile dans ce repère qu'il qualifie de « fixe », tente d'associer un repère dit « mobile » lié aux phénomènes qu'il étudie et utilise les lois de la mécanique pour décrire le mouvement de ce dernier⁵.

Nous admettons donc qu'il existe un repère fixe, systématiquement noté $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Oy_1}$, $\overrightarrow{Oz_1}$, lié à l'observateur qui regarde l'évolution, ou le résultat d'une évolution, d'un système auquel est rattaché un repère caractérisé lui aussi par trois axes de coordonnées $\overrightarrow{\Omega x}$, $\overrightarrow{\Omega y}$, $\overrightarrow{\Omega z}$. Cette convention est utilisée dans la figure 2 qui définit une rotation.

Cette notion de système de référence en mécanique newtonienne fait donc appel à trois axes concourants non coplanaires sur chacun desquels est défini un vecteur unitaire représentant l'unité de longueur choisie⁶.

⁵ Le physicien fera un pas de plus dans cette démarche en proposant des critères pour caractériser les repères où les lois de la physique seront valables ; ils seront alors appelés systèmes d'inertie. Si l'un de ces derniers coïncide avec le repère du mécanicien, ces systèmes prennent alors le nom de systèmes galiléens et les transformations permettant de passer d'un système galiléen à un autre, prennent le nom de transformations de Galilée. L'étape suivante, largement hors sujet, sera celle de la Relativité restreinte avec les transformations de Lorentz.

⁶ Pour des raisons pratiques, cette unité est choisie de façon identique suivant les axes, ce qui signifie que, pour tout couple formé par deux de ces vecteurs rapportés à l'origine, il est toujours possible de passer de l'un à l'autre par une rotation d'axe perpendiculaire au point d'intersection au plan des deux vecteurs et d'angle approprié.

Les coordonnées d'un point M de l'espace sont liées à la projection de ce point sur un axe parallèlement à un plan de référence ; ce point est simplement le point d'intersection avec cet axe du plan mené par M parallèle au plan de référence (figure 9)

De cette notion, nous passons à celle de la projection d'un vecteur qui est simplement définie par le segment correspondant aux extrémités de ce vecteur. Le segment, de ce fait, est orienté.

Ce résultat s'étend à une suite de points de l'espace qui forment une chaîne. Si le dernier point coïncide avec le premier, la chaîne est dite fermée.

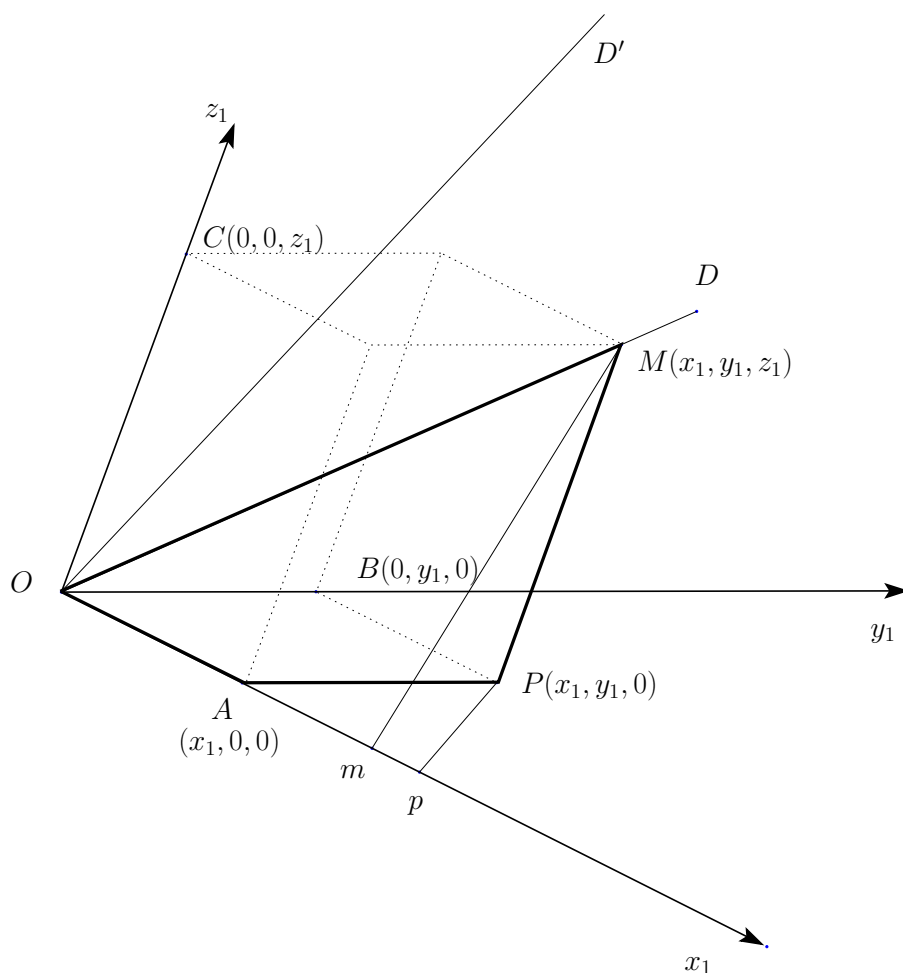


Figure 10. Les différents angles d'une droite avec les axes. Angle de deux droites.

Le théorème des projections indique alors qu'à une chaîne fermée de vecteurs correspond par projection sur un axe quelconque une chaîne analogue formée à partir de la projection des vecteurs de la première chaîne. Cela se traduit, par exemple, sur la figure 9 par la relation :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM} = 0 \quad \text{entraîne pour tout axe} \quad \overline{mn} + \overline{np} + \overline{pq} + \overline{qm} = 0$$

Autrement dit, la relation de Chasles se conserve par projection parallèle à un plan sur un axe quelconque.

Venons en maintenant à la notion de coordonnées. Étant donnés les trois axes concourants en O du repère et un point M quelconque, les coordonnées de M sont simplement les mesures algébriques des projections du vecteur \overrightarrow{OM} sur chacun des axes parallèlement au plan formé par les deux autres axes (figure hêtre) et la relation de Chasles s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Nous chercherons donc à exprimer les « conditions cinématiques », c'est-à-dire les coordonnées d'un point de chaque repère en fonction des coordonnées du même point exprimées dans l'autre repère.

Il est aussi pratique de remplacer le trièdre fixe (figure 2) par un autre, au prix d'une translation dont les axes sont parallèles au précédent et dont l'origine est la même que celle du repère mobile. Les points Ω et O sont alors confondus en un même point que nous désignerons désormais par O .

Afin d'en bien saisir les contraintes, nous allons étudier le passage du système $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oz_1}$ au système $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ dans toute sa généralité. Pour cela, nous adopterons pour les calculs des notations à symétrie ternaire qui présentent de façon équilibrée ce qui dépend des axes et nous procéderons par étapes en prenant pour guide la construction des axes d'un repère à partir de ceux du système fixe. Il nous faudra donc :

- écrire les relations entre les angles que fait une droite passant par l'origine avec les axes de coordonnées, les axes étant obliques ou rectangulaires ;
- en déduire l'angle que font deux telles droites ;
- introduire la notion de « paramètres directeurs » ;
- les résultats précédents permettant de définir le nouveau repère, établir les relations générales entre les deux systèmes d'axes en coordonnées obliques ou rectangulaires.

RELATIONS ENTRE LES ANGLES D'UNE DROITE ISSUE DE L'ORIGINE AVEC LES AXES DE COORDONNÉES. ANGLE ENTRE DEUX DROITES.

Soient donc $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oz_1}$, les axes obliques du trièdre de référence, soit \overrightarrow{D} , une droite orientée passant par l'origine, et soient α, β, γ les angles ⁷ que fait cette droite avec les directions positives des axes $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oz_1}$. Posons :

$$\alpha = (\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{D}); \quad \beta = (\overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{D}); \quad \gamma = (\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{D})$$

La connaissance de deux de ces angles ne suffit pas pour fixer OD : supposons que nous nous soyons donné α et β ; les deux cônes d'axe Ox_1 et Oy_1 d'angle au sommet α et β se coupent suivant deux génératrices symétriques par rapport au plan x_1Oy_1 . L'angle γ est donc nécessaire pour reconnaître laquelle des deux représente D .

⁷ Ces trois angles sont nécessairement liés puisqu'il suffit de deux paramètres pour définir la direction de la droite. Leur choix résulte de celui de la symétrie ternaire que nous avons choisi pour cette présentation.

Désignons par :

$$\lambda = y_1 \widehat{Oz_1}; \quad \mu = z_1 \widehat{Ox_1}; \quad \nu = x_1 \widehat{Oy_1};$$

les angles que font les axes entre eux ; et soit M un point quelconque de D de coordonnées (x_1, y_1, z_1) , P la projection de M sur le plan Ox_1y_1 parallèlement à Oz_1 (figure 10) ; A et B sont respectivement les projections de P sur x_1 parallèlement à y_1 et sur y_1 parallèlement à x_1 . Autrement dit, \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} sont les décompositions dans ce repère du vecteur \overrightarrow{OM} .

Soit maintenant une autre droite orientée $\overrightarrow{D'}$ passant par l'origine, faisant un angle V avec \overrightarrow{D} , des angles α' , β' , γ' respectivement avec les axes $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Oy_1}$, $\overrightarrow{Oz_1}$ du trièdre de référence. Considérons l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$

et projetons-la orthogonalement sur l'axe Ox_1 . Si ℓ est la norme du vecteur \overrightarrow{OM} , nous obtenons l'égalité :

$$\ell \cos \alpha = x_1 + y_1 \cos \nu + z_1 \cos \mu$$

Si nous recommençons en projetant, toujours orthogonalement, sur Oy_1 , Oz_1 et enfin sur D et sur D' , nous obtiendrons finalement :

$$(1) \quad \begin{aligned} \ell \cos \alpha &= x_1 + y_1 \cos \nu + z_1 \cos \mu \\ \ell \cos \beta &= x_1 \cos \nu + y_1 + z_1 \cos \lambda \\ \ell \cos \gamma &= x_1 \cos \mu + y_1 \cos \lambda + z_1 \end{aligned}$$

puis

$$(2) \quad \ell = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma$$

et

$$(3) \quad \ell \cos V = x_1 \cos \alpha' + y_1 \cos \beta' + z_1 \cos \gamma'$$

L'élimination de x_1 , y_1 , z_1 et de ℓ dans les systèmes linéaires et homogènes (1)+(2) et (1)+(3) conduit aux deux équations de compatibilité suivantes :

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & \cos \alpha \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & \cos \beta \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & \cos \alpha \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & \cos \beta \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & \cos \gamma \\ \cos \alpha' & \cos \beta' & \cos \gamma' & \cos V \end{vmatrix} = 0$$

LA NOTION DE PARAMÈTRES DIRECTEURS.

Les relations que nous venons de démontrer font appel à un point courant quelconque sur chacune des droites (D) et (D') . Il est plus commode de convenir, lorsqu'il s'agit de directions, de les repérer par un point particulier : on choisit l'un des deux qui se trouvent sur la droite à distance unité de l'origine.

Soit donc I , un point de (D) tel que $\|\overrightarrow{OI}\| = 1$. Par définition, les paramètres directeurs de la droite (D) sont les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OI} . Nous les noterons (u, v, w) .

Ces paramètres permettent d'évaluer la projection parallèlement à un plan d'un vecteur suivant un axe en fonction du module du vecteur. Par exemple, sur la figure 11, la projection du vecteur \overrightarrow{OM} sur l'axe $\overrightarrow{x_1}$ a pour valeur :

$$(6) \quad \overline{OA} = u\ell \quad \text{où } \ell \text{ est la longueur de } OM,$$

comme l'indiquent les triangles semblables OI_1I et OAM . Nous aurons bientôt l'occasion d'utiliser cette formule.

Les paramètres directeurs satisfont également aux relations :

$$(1') \quad \begin{aligned} \cos \alpha &= u + v \cos \nu + w \cos \mu \\ \cos \beta &= u \cos \nu + v + w \cos \lambda \\ \cos \gamma &= u \cos \mu + v \cos \lambda + w \end{aligned}$$

et

$$(2') \quad 1 = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma$$

De même, si u', v', w' sont les paramètres directeurs de la droite (D') , ils sont liés par des relations analogues :

$$(1'') \quad \begin{aligned} \cos \alpha' &= u' + v' \cos \nu + w' \cos \mu \\ \cos \beta' &= u' \cos \nu + v' + w' \cos \lambda \\ \cos \gamma' &= u' \cos \mu + v' \cos \lambda + w' \end{aligned}$$

et

$$(2'') \quad \cos V = u \cos \alpha' + v \cos \beta' + w \cos \gamma'$$

De ces différentes relations, il est aisé d'éliminer $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ des équations (1') en reportant leurs valeurs dans (2'). Nous obtenons :

$$(1''') \quad u^2 + v^2 + w^2 + 2vw \cos \lambda + 2wu \cos \mu + 2uv \cos \nu = 1$$

qui ne fait qu'exprimer que le vecteur \overrightarrow{OI} est unitaire.

Par des opérations semblables, le système (1'') (2'') donne le cosinus de l'angle des directions (D, D') :

$$(2''') \quad \begin{aligned} \cos V &= uu' + vv' + ww' \\ &+ (vw' + wv') \cos \lambda + (wu' + uw') \cos \mu + (uv' + v'u) \cos \nu \quad . \end{aligned}$$

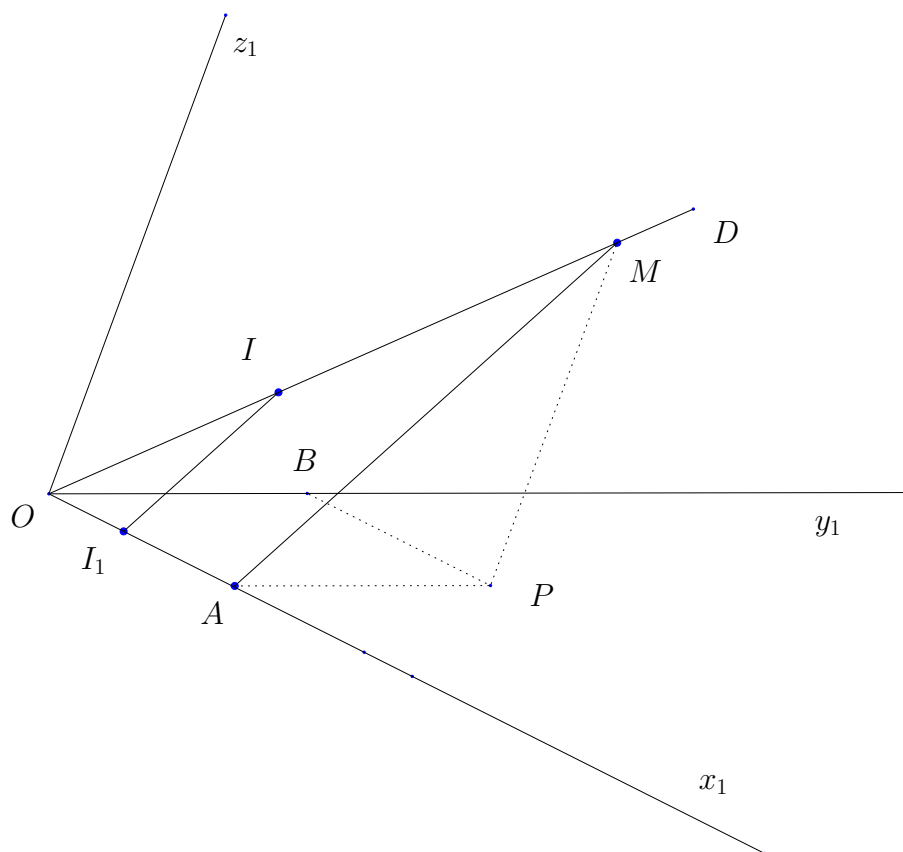


Figure 11. Paramètres directeurs d'une droite. Sur cette figure, n'apparaît qu'une partie de la figure 10 : le point M et ses coordonnées, le point I sur (D) tel que $\|OI\| = 1$, et sa coordonnée sur l'axe x_1 .

LES CHANGEMENTS D'AXES DANS LE CAS GÉNÉRAL.

À partir du moment où nous savons définir une direction dans un repère, la solution du problème du changement d'axes de coordonnées devient évidente : il suffit de se donner les directions des nouveaux axes dans le premier repère ce qui établira le lien entre les deux systèmes d'axes. Ce lien est évidemment l'expression des différentes façons d'écrire un vecteur quelconque \overrightarrow{OM} en fonction des deux systèmes de coordonnées.

Précisément, $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oz_1}$, étant les axes du système initial, les axes du système final $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ sont respectivement repérés par rapport à $\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oz_1}$ par leurs paramètres directeurs, c'est-à-dire par les coordonnées $(u, v, w), (u', v', w'), (u'', v'', w'')$, des points D sur \overrightarrow{Ox} , D' sur \overrightarrow{Oy} , D'' sur \overrightarrow{Oz} , situés, chacun, à une distance unité de l'origine (figure 12).

Soit alors M un point de coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans le repère initial et (x, y, z) dans le repère final. Faisons alors apparaître deux des contours OA_1P_1M et $OAPM$ de ses

coordonnées⁸. D'après la relation de Chasles, les vecteurs

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} + \overrightarrow{P_1M} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$

sont toutes deux égales à \overrightarrow{OM}

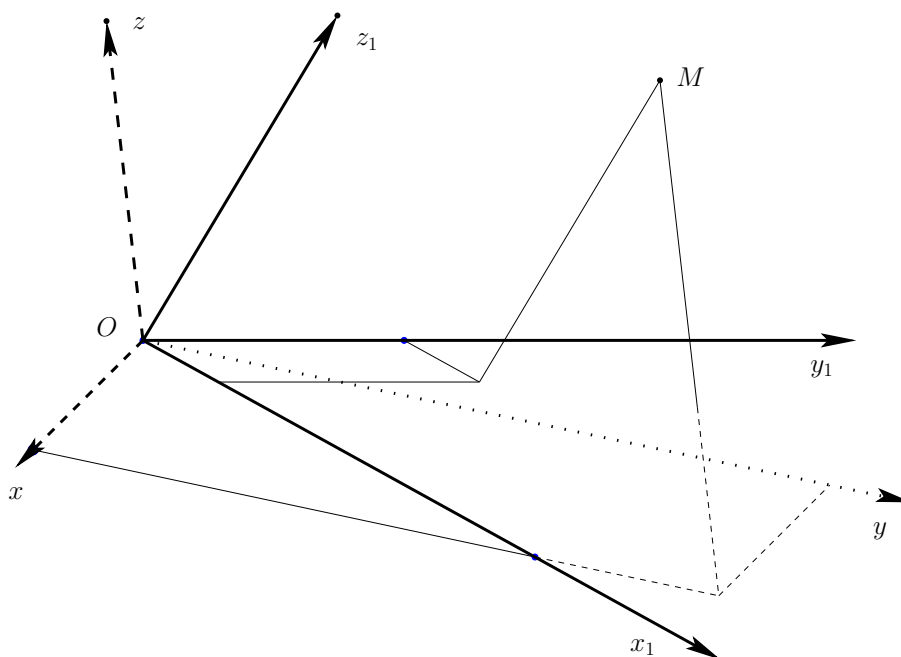


Figure 12. Changements d'axes. Le cas général.

Le théorème des projections nous dit que l'égalité

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} + \overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$

sera encore valable algébriquement si elle est projetée sur l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$ parallèlement au plan y_1Oz_1 .

Seul, dans le membre de gauche, $\overrightarrow{OA_1}$ aura une projection non nulle sur $\overrightarrow{Ox_1}$ et qui vaudra x_1 puisque c'est la valeur de $\overrightarrow{OA_1}$. Par contre, dans le membre de droite, chaque terme contribuera. La projection de \overrightarrow{OA} sera, comme nous l'avons vu (6), le produit de la longueur du vecteur, ici x , par la composante correspondante du paramètre directeur, ici u . De même, \overrightarrow{AP} aura pour contribution $u'y$, et \overrightarrow{PM} contribuera pour $u''z$. Ces contributions s'ajoutent (toujours le théorème des projections), et nous obtiendrons finalement par projections parallèles successives suivant les différents axes :

$$(7) \quad \begin{aligned} x_1 &= ux + u'y + u''z \\ y_1 &= vx + v'y + v''z \\ z_1 &= wx + w'y + w''z \end{aligned}$$

⁸ Nous avons donc par définition sur les axes correspondants

$$\overline{OA_1} = x_1; \quad \overline{A_1P_1} = y_1; \quad \overline{P_1M} = z_1 \quad \text{et} \quad \overline{OA} = x; \quad \overline{AP} = y; \quad \overline{PM} = z \quad .$$

Ce système d'équations dépend *a priori* de neuf paramètres. Mais il ne faut pas oublier que u, v, w sont liés par les relations (1'''), et qu'il en est de même pour u', v', w' et u'', v'', w'' , et donc que les relations

$$(8) \quad \begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 + 2vw \cos \lambda + 2wu \cos \mu + 2uv \cos \nu &= 1 \\ u'^2 + v'^2 + w'^2 + 2v'w' \cos \lambda + 2w'u' \cos \mu + 2u'v' \cos \nu &= 1 \\ u''^2 + v''^2 + w''^2 + 2v''w'' \cos \lambda + 2w''u'' \cos \mu + 2u''v'' \cos \nu &= 1 \end{aligned}$$

réduisent à six le nombre de paramètres indépendants.

Si le système initial est orthonormé, cela ne change rien au nombre de paramètres indépendants, mais cela simplifie les formules puisque $\cos \lambda = \cos \mu = \cos \nu = 0$. Sous ces conditions, les équations (1') se réduisent à :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= u \\ \cos \beta &= v \\ \cos \gamma &= w \end{aligned}$$

et les équations de contraintes ci-dessus à :

$$(8') \quad \begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= 1 \\ u'^2 + v'^2 + w'^2 &= 1 \\ u''^2 + v''^2 + w''^2 &= 1 \end{aligned}$$

Ce n'est que lorsque le système final est, lui aussi, orthonormé que le nombre de paramètres indépendants baisse à nouveau. Il faut en effet tenir compte de ce que OD, OD' et OD'' sont orthogonaux deux à deux, ce qui se traduit par les relations :

$$(8'') \quad \begin{aligned} uu' + vv' + ww' &= 0 \\ u'u'' + v'v'' + w'w'' &= 0 \\ u''u + v''v + w''w &= 0 \end{aligned}$$

et réduisent à trois le nombre de composants indépendants dans les formules (C) de changement d'axes. Dans ce cas, le système est dit orthogonal, ainsi que la matrice qui lui est associée.

ANGLES D'EULER ; DÉFINITIONS ET LIENS.

Nous venons de voir que les formules qui permettent de passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système du même type sont symétriques et comportent neuf coefficients. Ces coefficients ne sont pas tous indépendants : ils sont liés par six relations, et il n'y en a donc que trois qui sont arbitraires. Il peut être avantageux, notamment en Mécanique rationnelle ou en Mécanique céleste de ne pas procéder comme ci-dessus et de faire intervenir trois coefficients ayant un sens bien défini.

Certaines méthodes ont été mises en avant, mais nous nous contenterons d'exposer l'une d'elles, proposée par Euler, qui met en évidence trois angles indépendants (qui seront nos paramètres) dont la signification physique est évidente.

À chaque angle sera associé une rotation, et c'est le produit de ces trois rotations qui fournira la transformation permettant de passer d'un système de coordonnées à l'autre.

Plus précisément, nous allons démontrer le

THÉORÈME :

Soient deux trièdres directs trirectangles directs et de même sommet O

$$(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \quad \text{et} \quad (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Il existe une unique rotation permettant de passer d'un trièdre à l'autre, rotation qui se décompose en un produit de trois rotations dont les axes sont concourants. Ce sont les angles de ces trois rotations qui sont les paramètres choisis par Euler pour écrire les équations de passage d'un système à l'autre.

L'énoncé de ce théorème est tout à fait logique. Nous avons vu que le produit de deux rotations d'axes concourant est équivalent à une rotation d'axe passant par le point de concours. Cette propriété s'étend donc au produit de trois rotations pourvu que les axes concourent au même point.

Rappelons aussi que nous sommes convenus que le trièdre $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est fixe, et que le trièdre $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est mobile ; nous rechercherons donc les coordonnées des axes mobiles par rapport aux axes fixes.

Les notations suivantes seront utilisées :

- x sera la projection sur \vec{Ox} d'un point quelconque,
- \vec{x} sera le vecteur unitaire de l'axe des x ,

Avec des conventions analogues pour y et z , un point M aura pour coordonnées

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} \quad \text{dans le repère } (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\ &= x_1\vec{x}_1 + y_1\vec{y}_1 + z_1\vec{z}_1 \quad \text{dans le repère } (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \end{aligned}$$

Les différentes rotations ont été nommées par les astronomes qui les ont primitivement utilisées ; nous allons les construire successivement :

- Construction des paramètres de la première rotation, « la précession ».

Les plans (O, x_1, y_1) et (O, x, y) se coupent suivant une droite passant par O . Choisissons sur cette droite un sens positif, puis, toujours sur la même droite, un vecteur unitaire

$$\vec{n} = \frac{\vec{z}_1 \wedge \vec{z}}{\|\vec{z}_1 \wedge \vec{z}\|}$$

La transformation D correspondant s'écrit analytiquement :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos \psi \vec{x}_1 + \sin \psi \vec{y}_1 \\ \vec{t} &= -\sin \psi \vec{x}_1 + \cos \psi \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 &= \vec{z}_1 \end{aligned}$$

ce qui donne le lien entre $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ et $\vec{n}, \vec{t}, \vec{z}_1$ ⁹ qui s'exprime par

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \equiv D \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

Prenons pour axe de la première rotation \vec{Oz}_1 et pour angle l'angle (\vec{Ox}, \vec{On}) . Cet angle s'appelle « angle de précession » et se note ψ . La rotation correspondante est notée symboliquement $\mathcal{R}(\vec{Oz}, \psi)$; elle fait passer du trièdre (O, x_1, y_1, z_1) au trièdre (O, n, t, z_1) , où t est choisi de façon que (O, n, t, z_1) soit un trièdre direct.

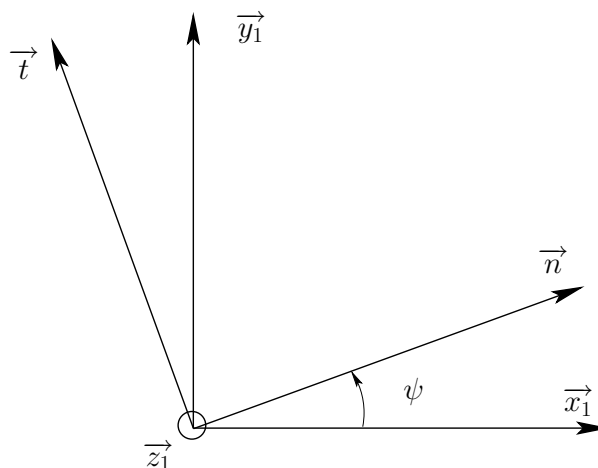


Figure 13. Première rotation, la précession. \vec{z}_1 , axe de rotation, est perpendiculaire au plan de la figure. L'angle de rotation $\psi = (\vec{x}_1, \vec{n})$ est appelé « angle de précession ».

- Construction des paramètres de la seconde rotation, « la nutation ».

Lors de cette rotation,

- \vec{On} est inchangé,
- \vec{Ot} devient \vec{Ow} ,
- \vec{Oz}_1 devient \vec{Oz} .

Du point de vue analytique, cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{n} \\ \vec{w} &= \cos \theta \vec{t} + \sin \theta \vec{z}_1 \\ \vec{z} &= -\sin \theta \vec{t} + \cos \theta \vec{z}_1 \end{aligned}$$

⁹ Remarque : Cette transformation permet d'écrire la matrice correspondant à la rotation dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les composantes de la première colonne étant, par convention, les composantes de la transformée du premier vecteur de la base, C'est donc la transposée de la matrice associée à la transformation D.

Faisons maintenant tourner le trièdre (O, z_1, n, t) autour de \vec{n} de façon que l'axe Oz_1 coïncide avec l'axe Oz . Cette rotation amène le plan x_1, y_1, n, t sur le plan n, w, x, y . L'angle entre les deux plans est donc l'angle de la rotation ; c'est aussi l'angle entre les normales aux deux plans ; on le nomme θ et on l'appelle « angle de nutation ».

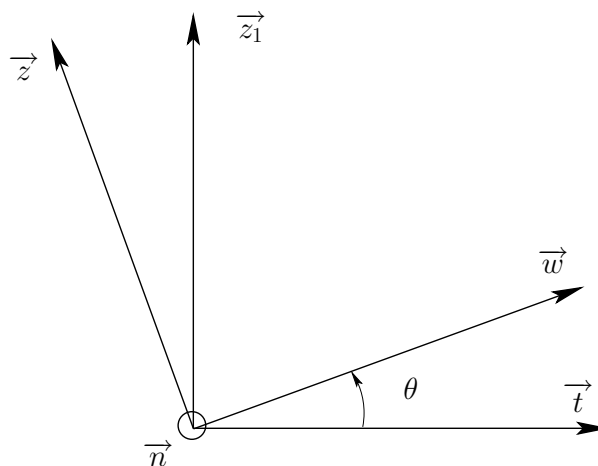


Figure 14. Seconde rotation, la nutation. \vec{n} , axe de la rotation est perpendiculaire au plan de la figure ; l'angle de la rotation $\theta = (\vec{t}, \vec{w})$, s'appelle « angle de nutation ».

Ce lien entre les vecteurs $\vec{n}, \vec{t}, \vec{z}_1$ et les vecteurs $\vec{n}, \vec{w}, \vec{z}$ peut s'écrire sous forme matricielle

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \equiv C \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, C n'est pas la matrice de la rotation dans la base $\vec{n}, \vec{t}, \vec{z}_1$; c'est sa transposée.

- Construction des paramètres de la troisième rotation, la « rotation propre ».

La dernière rotation amène le trièdre $(O, \vec{n}, \vec{w}, \vec{z})$ sur le trièdre $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. C'est une rotation autour de l'axe Oz d'un angle nommé φ , appelé « angle de rotation propre » qui, par définition amène \vec{n} en \vec{x} et \vec{w} en \vec{y} .

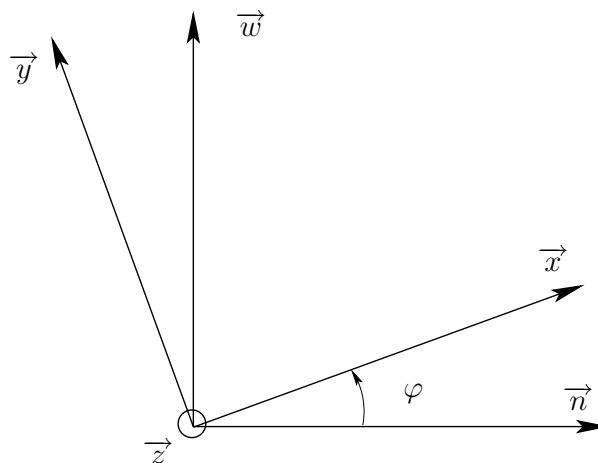


Figure 15. Troisième rotation, la rotation propre. L'axe \vec{z} de la rotation est perpendiculaire au plan de la figure ; l'angle de la rotation $\varphi = (\vec{n}, \vec{x})$ s'appelle « angle de rotation propre ».

Les équations de cette transformation s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \cos \varphi \vec{n} + \sin \varphi \vec{w} \\ \vec{y} &= -\sin \varphi \vec{n} + \cos \varphi \vec{w} \\ \vec{z} &= \vec{z} \end{aligned}$$

Soit, sous forme matricielle

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \equiv B \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS SUR LES ANGLES D'EULER

En conclusion, les trois rotations précédentes permettent de passer du trièdre $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ au trièdre $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le lien entre ces deux trièdres étant défini par le produit des trois matrices $BCD \equiv A$:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = BCD \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

Ce système résout le problème posé et son inverse A^{-1} est facile à calculer puisque, chacune des matrices, B, C, D étant orthogonale, son inverse est égale à sa transposée.

Regroupons les résultats obtenus sur ces diverses rotations d'axes :

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \equiv D \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \equiv C \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \equiv B \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

D'où

$$(13) \quad A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ces différents systèmes s'inversent en tenant compte des propriétés d'orthogonalité.

$$(11') \quad \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \equiv B^{-1} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

$$(10') \quad \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \equiv C^{-1} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{w} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

$$(9') \quad \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \equiv D^{-1} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{t} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

D'où le système inverse :

$$(13') \quad \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \quad \text{avec}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

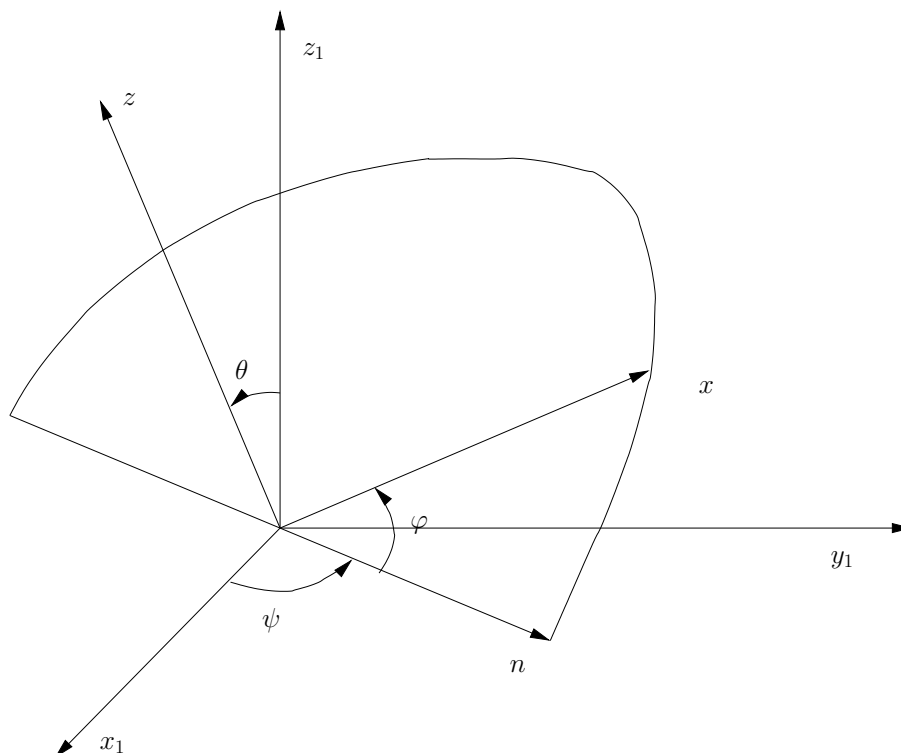


Figure 16_angles_Euler.eps. Les angles d'Euler représentés dans l'espace.

TRANSFORMATIONS D'EULER ET COMPOSANTES D'UN VECTEUR.

Les formules que nous venons de démontrer correspondent aux transformations successives des vecteurs des bases des différents systèmes de coordonnées définis dans les rotations définissant les transformations d'Euler.

Il est également utile de pouvoir disposer des formules donnant les composantes d'un vecteur donné dans ces différents systèmes.

Pour bien préciser nos notations, nous commencerons par rappeler brièvement les formules de transformation lors d'un changement de base dans le cas général, aussi bien sous forme tensorielle que matricielle.

Les résultats dont nous avons besoin correspondent à des transformations dans des espaces vectoriels de dimension 3 et nous les expliciterons, si besoin, dans ces espaces. Mais il est élémentaire de voir que les résultats obtenus dans ce paragraphe s'étendent sans difficulté aux espaces de dimension n .

Soit donc $(\vec{e}_i)_{i=1,2,3}$, une base de l'espace et soit $(\vec{e}'_j)_{j=1,2,3}$, une autre base reliée à la précédente par les relations :

$$(14) \quad \vec{e}_i = \alpha^j_i \vec{e}'_j$$

La notation ci-dessus, qui utilise la convention de sommation implicite d'Einstein, représente un système de trois équations vectorielles reliant linéairement les vecteurs composant chacune des bases ; ce système est du même type que les systèmes (9), (10), (11) définis dans les transformations d'Euler.

Comme nous l'avons déjà fait pour ces dernières, il est parfois pratique d'écrire formellement les équations (14) sous forme matricielle en plaçant les neuf coefficients α^j_i dans un tableau carré où j et i désignent respectivement la colonne et la ligne à l'intersection desquelles se trouve le nombre¹⁰ α^j_i .

En posant

$$A = [\alpha^j_i] = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^2_1 & \alpha^3_1 \\ \alpha^1_2 & \alpha^2_2 & \alpha^3_2 \\ \alpha^1_3 & \alpha^2_3 & \alpha^3_3 \end{pmatrix}$$

nous pouvons récrire le système (14) en utilisant de façon formelle¹¹ le produit matriciel

$$(15) \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix}$$

¹⁰ Il importe peu que l'on note les éléments α^j_i ou α_i^j . L'important est d'indiquer que l'indice du bas (covariant) correspond à l'indice d'une ligne, et l'indice du haut (contravariant) à celui d'une colonne. Certains auteurs (par exemple Lichnérowicz [5]) en profitent pour écrire tout simplement ces éléments sous la forme α_i^j .

¹¹ Cette écriture est formelle : elle indique simplement que la i -ème équation est obtenue en multipliant avec la même règle du jeu que celle des matrices la i -ème ligne du tableau A par la colonne formée par les vecteurs de base. Elle ne fait pas, *a priori*, de A une matrice. En particulier ce n'est pas ce que les mathématiciens nomment la « matrice de passage » ; cette dernière se déduit de la transformation linéaire qui permet de passer de l'ancienne base (\vec{e}_i) à la nouvelle (\vec{e}'_j) ; la « matrice de passage » P est définie par la valeur de la transformation linéaire sur les vecteurs de base, valeur dont les composantes donnent ses colonnes. Avec cette définition et nos conventions, nous avons $P = A^t$.

Puisqu'il s'agit d'un changement de base, le système ci-dessus est inversible et il existe des nombres β^p_k tels que

$$(16) \quad \overrightarrow{e'_k} = \beta^p_k \overrightarrow{e_p}$$

et la combinaison des deux systèmes conduit aux deux familles de relations :

$$(17) \quad \alpha^j_i \beta^k_j = \delta^k_i \quad \text{et} \quad \beta^i_q \alpha^j_i = \delta^j_q$$

ce qui montre en particulier que le « tableau A » est inversible au sens des matrices et que son inverse, avec les mêmes conventions que pour le « tableau A », peut s'écrire

$$A^{-1} = [\beta^k_j] \quad \text{avec} \quad A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Il nous reste maintenant à voir ce que deviennent dans ces transformations les composantes d'un vecteur quelconque \overrightarrow{x} de l'espace. Nous avons, avec les mêmes conventions :

$$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i} = x'^j \overrightarrow{e'_j}$$

soit, en faisant intervenir le changement de base

$$\overrightarrow{x} = x^i \alpha^k_i \overrightarrow{e'_k} = x'^j \overrightarrow{e'_j}$$

puis, en identifiant sur les vecteurs de base

$$x^i \alpha^j_i = x'^j$$

et, enfin en inversant

$$x^i \alpha^j_i \beta^k_j = x^k = \beta^k_j x'^j$$

En définitive les formules permettant de passer de la base (e) à la base (e') s'écrivent pour les composantes d'un vecteur et pour les vecteurs de base :

$$(18) \quad x^k = \beta^k_j x'^j \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_i} = \alpha^j_i \overrightarrow{e'_j}$$

Pour passer aux expressions matricielles de ces équations, nous constatons que si le second système d'équations fait appel aux mêmes conventions que celles du produit d'une matrice par un vecteur colonne, il n'en est pas de même pour le premier système qui, compte tenu de la position des indices, fait intervenir le produit de deux vecteurs colonne. Pour retrouver les conventions initiales, il faut permuter lignes et colonnes dans le tableau, autrement dit, faire appel au transposé $(A^{-1})^t$.

Dans ces conditions, nous pouvons donc écrire sous forme matricielle, les systèmes ci-dessus :

$$(19) \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (A^t)^{-1} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overrightarrow{e'_1} \\ \overrightarrow{e'_2} \\ \overrightarrow{e'_3} \end{pmatrix}$$

Si A est une matrice orthogonale (et c'est le cas des transformations d'Euler), $(A^{-1})^t = A$ et les transformations des composantes et celles des vecteurs de base obéissent aux mêmes lois.

LIEN ENTRE VITESSE ET ROTATION.

Revenons aux transformations d'Euler.

• Les formules d'Euler dont nous allons partir sont les formules (13') renumérotées ici pour plus de confort

$$(20) \quad \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{z_1} \end{pmatrix} = (BCD)^{-1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{z} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{z} \end{pmatrix}$$

avec, puisque toutes les matrices sont orthogonales, $A^{-1} = A^t = D^t C^t B^t$, et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les transformations des composantes contravariantes d'un vecteur

$$\overrightarrow{OM} = x^1 \overrightarrow{x_1} + y^1 \overrightarrow{y_1} + z^1 \overrightarrow{z_1} = x \overrightarrow{x} + y \overrightarrow{y} + z \overrightarrow{z}$$

feront appel aux mêmes matrices que les précédentes, c'est-à-dire

$$(21) \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

• Le vecteur unitaire de l'axe des z qui a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ a, dans le repère $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, toujours d'après les mêmes formules, pour coordonnées $(\sin \psi \sin \theta, -\cos \psi \sin \theta, \cos \theta)$ avec $(\sin \psi \sin \theta)^2 + (-\cos \psi \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1$. C'est donc un vecteur unitaire normal au plan $(O, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x})$; si nous posons :

$$(22) \quad \begin{aligned} a &\equiv \sin \psi \sin \theta \\ b &\equiv -\cos \psi \sin \theta \\ c &\equiv \cos \theta \end{aligned} ,$$

l'équation de ce plan peut s'écrire

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Remarquons que, par construction, il coupe le plan $(0, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1})$ suivant la droite qui supporte (O, \overrightarrow{n}) et dont l'équation est évidemment $ax + by = 0$.

• Je suppose maintenant qu'un mobile, lié à l'axe des x à la distance R de O , tourne autour de $O\vec{z}$ en décrivant dans le plan ci-dessus un cercle centré en O et faisant à l'instant t un angle $\varphi(t)$ avec $O\vec{n}$.

Parmi les angles d'Euler, θ et ψ sont indépendants du temps ; par contre, φ en dépend.

Dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, M est immobile et a pour coordonnées $(R, 0, 0)$.

Dans le repère fixe $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, les coordonnées de M sont :

$$(23) \quad \begin{aligned} x^1 &= R(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) \\ y^1 &= R(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) \\ z^1 &= R \sin \varphi \sin \theta \end{aligned}$$

Dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, les composantes de la vitesse du point M s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= R \frac{d\varphi}{dt} (-\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta) \\ \frac{dy^1}{dt} &= R \frac{d\varphi}{dt} (-\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \cos \theta) \\ \frac{dz^1}{dt} &= R \frac{d\varphi}{dt} (\sin \theta \cos \varphi) \end{aligned}$$

• Montrons que la vitesse dépend linéairement de la position \overrightarrow{OM} en faisant apparaître dans les seconds membres les quantités x^1 , y^1 et z^1 .

Dans dx^1/dt , introduisons θ dans le premier terme en y insérant $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$; le terme entre parenthèses s'écrit alors :

$$\begin{aligned} () &= -\cos \psi \sin \varphi \sin^2 \theta - \cos \psi \sin \varphi \cos^2 \theta - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\ &= -\cos \psi \sin \theta \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta (\cos \psi \sin \varphi \cos \theta + \sin \psi \cos \varphi) \\ &= b z^1/R + c y^1/R \end{aligned}$$

D'où la première composante de la vitesse

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} (bz^1 - cy^1)$$

La seconde composante se traite de la même manière. En introduisant $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$, la parenthèse du second membre s'écrit :

$$\begin{aligned} () &= \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \sin \theta - \cos \theta (\sin \psi \sin \varphi \cos \theta - \cos \psi \cos \varphi) \\ &= -z^1/R a + c x^1/R \end{aligned}$$

D'où pour la seconde composante de la vitesse :

$$\frac{dy^1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} (cx^1 - az^1)$$

Pour la troisième composante, c'est l'introduction de $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi$ qui fait apparaître les éléments cherchés. Nous avons :

$$\sin \theta \cos \varphi = \sin \psi \sin \theta \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \psi \cos \varphi$$

$\sin \psi \cos \varphi$ est, à un coefficient près, le premier terme de y^1 ; il suffit d'ajouter et de retrancher le second ; puis de faire le même type d'opération avec $\cos \psi \cos \varphi$ qui correspond au premier terme de x^1 . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi &= \sin \psi \sin \theta (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta - \cos \psi \sin \varphi \cos \theta) \\ &\quad + \cos \psi \sin \theta (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta) \end{aligned}$$

Il n'y a plus alors qu'à remarquer que les derniers termes de chaque parenthèse sont affectés de signes contraires et se compensent pour obtenir :

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{R}(ay^1 - bx^1)$$

D'où pour la troisième composante :

$$\frac{dz^1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}(ay^1 - bx^1)$$

- En résumé, les trois composantes de la vitesse s'écrivent :

$$(24-a) \quad \begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt}(bz^1 - cy^1) \\ \frac{dy^1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt}(cx^1 - az^1) \\ \frac{dz^1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt}(ay^1 - bx^1) \end{aligned}$$

La vitesse dépend donc bien linéairement de \overrightarrow{OM} . Elle peut aussi prendre la forme :

$$(24-b) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} &= \frac{d\varphi}{dt} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -c \frac{d\varphi}{dt} & b \frac{d\varphi}{dt} \\ c \frac{d\varphi}{dt} & 0 & -a \frac{d\varphi}{dt} \\ -b \frac{d\varphi}{dt} & a \frac{d\varphi}{dt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou encore

$$(24-c) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \Omega \overrightarrow{OM}$$

La vitesse dépend bien des propriétés caractéristiques de la rotation : dans le tableau Ω , nous retrouvons aux places (3,2), (1,3), (1,2) les composantes du vecteur unitaire de l'axe autour duquel s'effectue la rotation, composantes multipliées par la vitesse angulaire de la rotation.

APPLICATION AUX TRANSFORMATIONS D'EULER.

Nous allons étudier la façon dont les résultats précédents s'étendent aux transformations d'Euler, ce qui nous fournira une information supplémentaire sur les propriétés du tableau Ω .

Pour y parvenir, il nous suffira d'appliquer les résultats (21) du paragraphe précédent aux transformations formées à partir des angles d'Euler, qui, rappelons-le, sont des angles qui correspondent à la décomposition d'une rotation dans l'espace en trois rotations autour d'un même point. Comme les calculs ont été effectués sur les composantes des vecteurs, les formules d'Euler associées (19) s'écrivent avec $A = BCD$:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} = D^t C^t B^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B C D \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

où les matrices D , C , B sont définies respectivement dans les formules (9), (10), (11) et où leurs transposées D^t , C^t , B^t sont leurs inverses puisque ce sont des matrices orthogonales.

Dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le système étudié est supposé fixe ; ses axes ne dépendent pas explicitement du temps. Les composantes de la vitesse d'un point de ce repère sont alors définies par :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} (D^t C^t B^t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} (D^t C^t B^t) B C D \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

Sur cette formule, la linéarité de la vitesse par rapport à la position apparaît de façon éclatante.

Explicitant la dérivation et tenant compte des définitions des matrices, nous pouvons réécrire la formule ci-dessus sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dD^t}{dt} D \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} + D^t \frac{dC^t}{dt} C D \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} + D^t C^t \frac{dB^t}{dt} B C D \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

La suite n'est plus alors que simple affaire de calcul matriciel dont voici quelques étapes intermédiaires sans les détailler :

$$\frac{dD^t}{dt} D = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dC^t}{dt} C = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^t \frac{dC^t}{dt} C D = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dB^t}{dt} B = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t \frac{dB^t}{dt} B C = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^t C^t \frac{dB^t}{dt} B C D = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & 0 \end{pmatrix}$$

Au total, les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$(25-a) \quad \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} \\ + \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} \\ + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

Chacune des rotations apparaît avec son axe dans le repère $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et la vitesse angulaire qui lui est associée selon la définition ci-dessus :

- axe $(0, 0, 1)$ $(0, \vec{z}_1)$ pour la vitesse angulaire $\dot{\psi}$;
- axe $(\cos \psi, \sin \psi)$ $(0, \vec{n})$ pour la vitesse angulaire $\dot{\theta}$;
- axe $(\sin \theta \sin \psi, -\sin \theta \cos \psi, \cos \theta)$ $(0, \vec{z})$ pour la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ d'après (22).

La suite est évidente : mise en facteur de la position, addition des matrices en tenant compte de leurs coefficients ; nous obtenons :

$$(25-b) \quad \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} = \Omega_{\theta\varphi\psi} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \Omega_{\theta\varphi\psi} \text{ représente le tableau :}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dot{\psi} - \dot{\varphi} \cos \theta & \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta & 0 & -\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi & \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi & 0 \end{pmatrix}$$

INTERPRÉTATION TENSORIELLE DU TABLEAU Ω .

Les calculs, effectués jusqu'ici dans un repère donné, des composantes de la vitesse font apparaître un certain nombre de tableaux et chacun d'eux est relié à une rotation qu'il définit parfaitement en donnant son axe et sa vitesse angulaire. De plus, ces calculs

appliqués à la transformation d'Euler montrent que, dans le cas d'une triple rotation autour d'un point, ces tableaux peuvent s'additionner au sens de l'addition des matrices. Il reste à leur donner un sens et il est plus facile de le faire en repartant des formules (24-a), (24-b) et (24-c).

Dans le cadre d'une interprétation tensorielle, et du calcul indiciel associé, il est plus pratique, pour ce paragraphe uniquement, de transformer légèrement les formules (24-a), (24-b) et (24-c) en posant :

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv x^1; & x^2 &\equiv y^1; & x^3 &\equiv z^1 \\ \omega^1 &\equiv a \frac{d\varphi}{dt}; & \omega^2 &\equiv b \frac{d\varphi}{dt}; & \omega^3 &\equiv c \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

ce qui permet de les écrire plus simplement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dx^2}{dt} \\ \frac{dx^3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Les quantités x^1, x^2, x^3 sont les composantes d'un vecteur ; leurs dérivées, celles d'un glisseur. Nous savons donc comment elles varient dans un changement de base et nous allons utiliser ce fait pour en déduire la nature du "tableau Ω ".

Les trois expressions ci-dessus s'écrivent alors en utilisant à nouveau la convention de sommation implicite d'Einstein :

$$\frac{dx^i}{dt} = \omega^i_j x^j$$

où nous désignons par ω^i_k les neuf éléments du "tableau Ω " ordonnés selon ses lignes (indice i contravariant) et ses colonnes (indice j covariant), choix impliqué par les règles de la convention d'Einstein (il n'y a pas de confusion possible avec les ω^i qui n'ont qu'un indice).

Dans un changement de base, les composantes de vecteurs varieront selon (18) :

$$x^k = \beta^k_p x'^p \quad \text{et} \quad \frac{dx^k}{dt} = \beta^k_j \frac{dx'^j}{dt}$$

les quantités β^i_j correspondent aux éléments de la matrice de changement de base ; les quantités primées sont les composantes des mêmes éléments dans la nouvelle base. Nous noterons α^i_j les composantes de la matrice inverse (17).

En reportant ces expressions dans la formule de définition, cette dernière s'écrit :

$$\frac{dx^i}{dt} = \beta^i_q \frac{dx'^q}{dt} = \omega^i_j \beta^j_q x'^q$$

Multiplier les deux membres par la matrice inverse transforme ces égalités en :

$$\alpha^p_i \beta^i_k \frac{dx'^k}{dt} = \omega^i_j \alpha^p_i \beta^j_q x'^q$$

soit, après contraction

$$\frac{dx'^p}{dt} = \alpha^p_i \omega^i_j \beta^j_q x'^q$$

ce qui montre que, dans le changement de base, le “tableau Ω ” obéit à la règle

$$(26) \quad \omega'^p_q = \alpha^p_i \omega^i_k \beta^k_q$$

si nous imposons la covariance des formules dans le changement de base. Dans ce cas, l'entité associée au “tableau Ω ” est un tenseur (antisymétrique) d'ordre deux, une fois covariant, un fois contravariant.

REMARQUE :

Si nous identifions le tenseur Ω dans la base choisie avec l'opérateur correspondant, l'application linéaire Ω associée est antisymétrique par rapport au produit scalaire usuel, c'est-à-dire que, pour tout vecteur \overrightarrow{OP} et tout vecteur \overrightarrow{OM} , nous avons :

$$(27) \quad (\overrightarrow{OP}, \Omega \overrightarrow{OM}) = -(\Omega \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$$

Un simple calcul le montre.

INTERPRÉTATION “VECTORIELLE” DES CALCULS PRÉCÉDENTS ; LE “VECTEUR” DE ROTATION INSTANTANÉ.

Revenons à nouveau sur les formules (24-a), (24-b) et (24-c) qui définissent les composantes de la vitesse d'un point lors d'une rotation :

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} (bz^1 - cy^1) \\ \frac{dy^1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} (cx^1 - az^1) \\ \frac{dz^1}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} (ay^1 - bx^1) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\varphi}{dt} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

La formule de gauche a de fortes analogies avec un produit vectoriel ; celle de droite montre explicitement que le tenseur ne dépend que de trois paramètres ; il est tentant d'essayer de faire de ces trois paramètres, en les multipliant par la vitesse angulaire, un vecteur en interprétant les quantités

$$\omega^1 = a \frac{d\varphi}{dt} ; \quad \omega^2 = b \frac{d\varphi}{dt} ; \quad \omega^3 = c \frac{d\varphi}{dt}$$

comme les composantes sur \overrightarrow{Ox}_1 , \overrightarrow{Oy}_1 , \overrightarrow{Oz}_1 d'une longueur affectée d'un signe et portée par \overrightarrow{Oz}_1 ¹².

Si je nomme $\widehat{\Omega}$ cette entité, il est alors possible de récrire formellement les relations ci-dessus sous la forme :

$$(28) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \widehat{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad \text{pour signifier} \quad \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt} \\ \frac{dy^1}{dt} \\ \frac{dz^1}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix}$$

$\widehat{\Omega}$ devenant un "vecteur" dit "axial" ; la seule formule exacte est la formule de droite ci-dessus.

Ces conventions sont celles de la plupart des mécaniciens¹³, qui assimilent vecteur axial et vecteur ordinaire de \mathbb{R}^3 , notation commode pour les calculs qui permet d'éviter d'introduire une matrice anti-symétrique de rotation, mais qui fait, à juste titre, hurler, voire se pâmer, les plus distingués des mathématiciens.

Nous définissons donc les trois vecteurs axiaux suivants :

$$\begin{array}{llll} \widehat{\omega}_{z_1} & \text{porté par} & \overrightarrow{Oz_1} & \text{de module } \dot{\psi}, \\ \widehat{\omega}_n & \text{"} & \overrightarrow{On} & \text{" } \dot{\theta}, \\ \widehat{\omega}_z & \text{"} & \overrightarrow{Oz} & \text{" } \dot{\varphi}. \end{array}$$

Si ψ varie seul, le mouvement correspond à une rotation autour de $\overrightarrow{z_1}$ et le point M aura pour vitesse

$$\overrightarrow{V}_1 = \widehat{\omega}_{z_1} \wedge \overrightarrow{OM}$$

De même, si θ varie seul, le même point M aura pour vitesse

$$\overrightarrow{V}_2 = \widehat{\omega}_n \wedge \overrightarrow{OM}$$

Enfin, si φ varie seul, ce même point M aura pour vitesse

$$\overrightarrow{V}_3 = \widehat{\omega}_z \wedge \overrightarrow{OM}$$

Le calcul effectué dans le paragraphe « Lien entre vitesse et rotation » montre (25) que, si chacun des angles varie, la composition des vitesses a un sens et que la vitesse du point M sera :

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 + \overrightarrow{V}_3 = \left(\widehat{\omega}_{z_1} + \widehat{\omega}_n + \widehat{\omega}_z \right) \wedge \overrightarrow{OM}$$

¹² Ce qui ne correspond donc pas à la définition d'un vecteur de la géométrie euclidienne qui, elle, correspond à une longueur (nombre positif) et une direction.

¹³ Là encore, il est impossible de donner de bibliographie vu le nombre d'ouvrages et d'habitudes non standardisées. Nous avons utilisé, par exemple pour les angles d'Euler, les notations de H. Cabannes [3], qui ne sont pas tout à fait les mêmes (ψ et ϕ sont permutés) que celles de H. Goldstein [4] chez qui on trouvera (p.108) des références à d'autres auteurs.

Le vecteur

$$\widehat{\Omega} = \widehat{\omega}_{z_1} + \widehat{\omega}_n + \widehat{\omega}_z$$

s'appelle « vecteur rotation instantané ». Il s'écrit par définition :

$$(29) \quad \widehat{\Omega} = \dot{\psi} \overrightarrow{z_1} + \dot{\theta} \overrightarrow{n} + \dot{\varphi} \overrightarrow{z}$$

et il nous reste à trouver son expression dans chaque base pratique en explicitant $\overrightarrow{z_1}$, \overrightarrow{n} , \overrightarrow{z} dans les bases en question.

- Expression de $\widehat{\Omega}$ dans la base $(O, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z})$:

La rotation instantanée s'écrivant en fonction de z_1 (29), il suffit d'exprimer ce dernier dans la base ci-dessus. Les équations (10) se simplifiant en

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{z_1} \end{pmatrix}$$

s'inversent en utilisant l'orthogonalité de la matrice pour donner

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{z} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\overrightarrow{z_1} = \sin \theta \overrightarrow{w} + \cos \theta \overrightarrow{z}$$

Soit en reportant dans (29)

$$(30) \quad \widehat{\Omega} = \dot{\theta} \overrightarrow{n} + \dot{\psi} \sin \theta \overrightarrow{w} + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \overrightarrow{z}$$

- Expression de $\widehat{\Omega}$ dans la base $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$:

Nous venons de calculer $\overrightarrow{z_1}$ en fonction de \overrightarrow{w} et de \overrightarrow{z} . Pour expliciter (29) dans la base ci-dessus, il suffit de connaître \overrightarrow{w} et \overrightarrow{n} en fonction de \overrightarrow{x} et \overrightarrow{y} . Or, des relations (11), nous pouvons extraire

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix}$$

qui s'inversent par orthogonalité en

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{y} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{z_1} &= \sin \theta \overrightarrow{w} + \cos \theta \overrightarrow{z} = \sin \varphi \sin \theta \overrightarrow{x} + \cos \varphi \sin \theta \overrightarrow{y} + \cos \theta \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{n} &= \cos \varphi \overrightarrow{x} - \sin \varphi \overrightarrow{y} \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire $\widehat{\Omega}$ sous la forme

$$(31) \quad \begin{aligned} \widehat{\Omega} &= (\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{x} \\ &+ (\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{y} \\ &+ (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z} \end{aligned}$$

Dans un certain nombre d'ouvrage, les coordonnées de $\widehat{\Omega}$ sont notées (p, q, r) dans le système $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$(31') \quad \widehat{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$$

Application : aiguille aimantée dans le champ terrestre. Magnétisme vrai et magnétisme apparent.

POSITION DU PROBLÈME.

Une aiguille aimantée est centrée sur un pivot autour duquel elle est mobile. Les deux directions dans lesquelles elle peut osciller simultanément sont représentés sur la partie (a) de la figure (17) : l'aiguille est fixée à l'axe horizontal aa' autour duquel elle peut osciller verticalement. Cet axe est solidaire d'un cylindre vertical pouvant tourner sur lui-même.

Ce système est placé dans le champ magnétique terrestre. Nous supposons qu'à l'équilibre, l'axe \vec{z}_1 du pivot de l'aiguille est vertical et l'origine O est choisie à l'intersection de aa' et de \vec{z}_1 . Cet équilibre est décrit par la partie (b) de la figure (17). L'aiguille est alors dans le plan vertical passant par \vec{z}_1 et parallèle au champ magnétique terrestre. L'axe \vec{y}_1 est choisi dans ce plan perpendiculaire à \vec{z}_1 , ainsi que l'axe \vec{x}_1 orthogonal à ce plan de façon que le trièdre (Ox_1, Oy_1, Oz_1) soit direct.

Toujours à l'équilibre, l'aiguille se trouve donc dans le plan y_1Oz_1 et elle indique la direction \vec{SN} du nord magnétique. À cette aiguille est associé un trièdre centré en O et dont l'axe des \vec{z} est choisi dans la direction \vec{NS} . Le trièdre direct (Ox, Oy, Oz) associé à cette aiguille est représenté à l'équilibre sur la partie (b) de la figure (17) et, toujours à l'équilibre, les axes \vec{x} et \vec{x}_1 coïncident. L'angle de Oz_1 avec le champ magnétique terrestre \vec{B} reste fixe au cours du mouvement et vaut $\pi + \alpha$ par convention.

Lorsqu'on déplace l'aiguille aimantée en faisant légèrement tourner le système autour de l'axe \vec{z}_1 , elle subit, du fait du champ magnétique terrestre, une force de rappel qui la ramène, en général en oscillant, vers sa position d'équilibre.

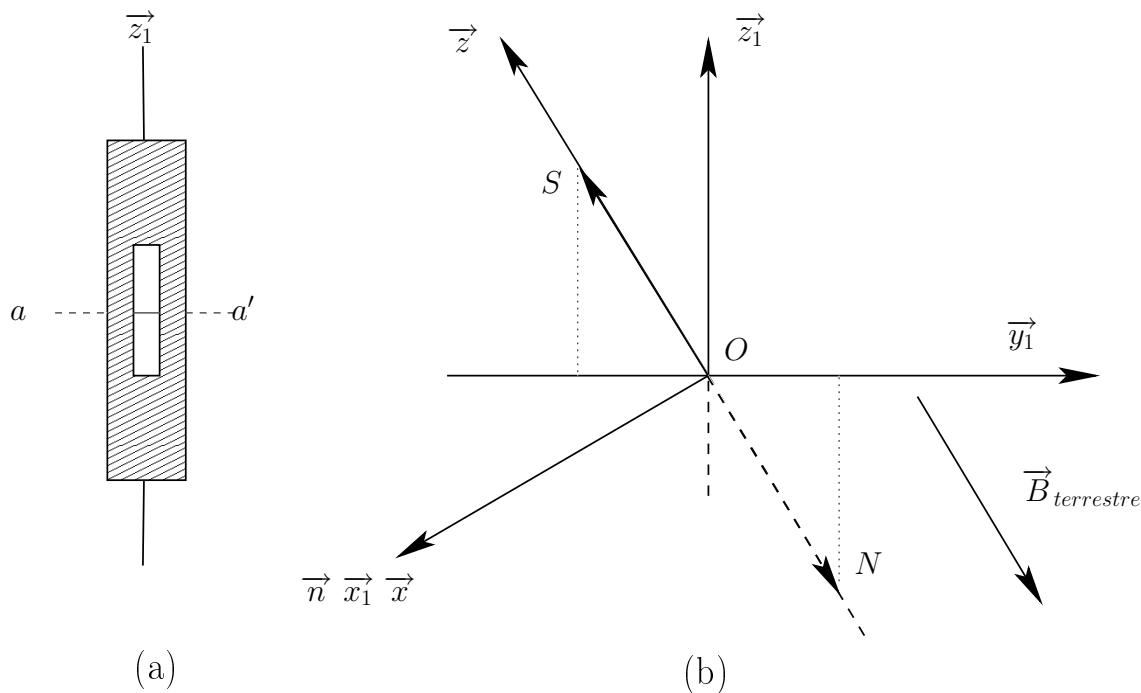


Figure 17. Représentation des conditions d'équilibre de la boussole. Le pivot de l'aiguille aimantée est schématisé sur la partie (a) de la figure : l'aiguille, non représentée, est solidaire de l'axe aa' ; elle tourne autour de cet axe dans un plan vertical si \vec{z}_1 est vertical, ce que nous supposons et l'ensemble est libre de tourner autour de ce même axe. La partie (b) décrit l'état d'équilibre : la boussole SN indique le nord magnétique qui fait un angle fixe avec \vec{z}_1 . Avec les conventions choisies, le plan x_1Oy_1 est horizontal. À l'équilibre, l'axe \vec{x} du repère mobile coïncide avec \vec{x}_1 ; il en est de même de l'axe \vec{n} de la nutation définie dans la méthode des angles d'Euler.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT.

Avec les conventions que nous venons d'adopter, le mouvement du système sera déterminé si nous connaissons, à chaque instant, la position du repère mobile (Ox, Oy, Oz) par rapport au repère fixe (Ox_1, Oy_1, Oz_1) .

Nous utiliserons pour variables les angles d'Euler ψ, θ, φ que nous avons décrits précédemment. Ce sont eux qui varieront lorsqu'on décalera l'aiguille aimantée de sa position d'équilibre et à partir desquels nous allons construire le Lagrangien correspondant au système [3] [4] ; les techniques classiques de la mécanique analytique nous fourniront ensuite les équations d'évolution que nous recherchons (équations d'Euler-Lagrange).

Nous ferons également l'hypothèse que la pesanteur n'intervient pas dans notre problème et nous négligerons les forces de frottement.

Dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le tenseur d'inertie correspond à celui d'une barre centrée sur Oz et ses éléments sont définis à partir de $x = y = 0$ et $-\ell \leq z \leq \ell$ par

$$\bar{I} = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm & D &= \int yz dm \\ B &= \int (z^2 + x^2) dm & E &= \int zx dm \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm & F &= \int xy dm \end{aligned}$$

avec $dm = \mu ds$ où μ est la masse par unité de longueur et dm , la masse d'un élément de longueur dl .

Les éléments non diagonaux sont donc tous nuls, C également et

$$A = B = \int z^2 dm = \mu \int_{-\ell}^{\ell} z^2 dz = \frac{2\ell^3}{3} \mu = m \frac{\ell^2}{3}$$

puisque $2\ell\mu = m$. Donc

$$\overline{I} = \begin{vmatrix} m\frac{\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dans le même repère $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, le vecteur rotation instantanée a pour valeur :

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega} &= p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ &= (\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{x} \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{y} \\ &\quad + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de rotation de l'aiguille s'écrit donc dans ce repère :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \widehat{\Omega} \overline{I} \widehat{\Omega} &= \frac{1}{2} \left[m \frac{\ell^2}{3} (\dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + m \frac{\ell^2}{3} (\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 \right] \\ &= m \frac{\ell^2}{6} [\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2] \end{aligned}$$

Le travail effectué par le système¹⁴ pendant cette rotation est celui du couple de rappel produit par l'aimantation $\vec{\mathcal{M}}$ de l'aiguille aimantée lorsqu'elle est rappelée vers sa position d'équilibre par le champ magnétique terrestre. Le travail à l'instant t est donné par

$$k (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \widehat{\Omega}$$

où k dépend des unités. Il nous reste à l'évaluer dans le repère $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Dans ce repère,

- $\widehat{\Omega}$ est connu et vaut (31') $p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$;
- le champ de l'aimant vaut $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{z}$;
- Le champ magnétique terrestre \vec{B} s'évalue à partir de ses coordonnées dans le système fixe (figure 17)

$$(32) \quad \vec{B} = B \sin \alpha \vec{y}_1 - B \cos \alpha \vec{z}_1$$

¹⁴ Ce résultat est bien connu, mais les présentations faites par E. Durand ([6], p.576 et 728) et M. Jouguet ([7], p.243 et suivantes) sont intéressantes.

et son premier terme, avec les conventions choisies, n'est autre que la projection du champ magnétique sur le plan horizontal.

En tenant compte des formules de passage (13'), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{B}}{B} &= (\sin \psi \sin \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta \sin \varphi - \cos \alpha \sin \theta \sin \varphi) \vec{x} \\ &+ (-\sin \psi \sin \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \theta \cos \varphi) \vec{y} \\ &- (\sin \alpha \cos \psi \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) \vec{z} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle, calculée dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, vaut donc, au facteur k près :

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{M}} &= B_z \mathcal{M} \\ &= -B\mathcal{M}(\sin \alpha \cos \psi \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) \end{aligned}$$

Le lagrangien, qui vaut l'énergie cinétique diminuée de l'énergie potentielle, s'écrit :

$$(33) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{6} m \ell^2 \left[\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right] + k B \mathcal{M} [\sin \alpha \cos \psi \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta]$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \text{où } q_i = \psi, \theta.$$

fournissent alors les équations de la dynamique du système

$$(34) \quad \begin{aligned} \frac{1}{3} m \ell^2 \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\psi}) + k B \mathcal{M} \sin \alpha \sin \theta \sin \psi &= 0 \\ \frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - k B \mathcal{M} [\sin \alpha \cos \psi \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta] &= 0 \end{aligned}$$

Nous noterons simplement que la variable φ n'intervient pas dans le lagrangien réduisant le nombre d'équations de la dynamique à deux, comme nous pouvions nous y attendre avec un système à deux degrés de liberté.

CAS PARTICULIER : L'ÉQUATION DE LA BOUSSOLE HORIZONTALE.

Si nous figeons l'axe aa' du pivot de la partie (a) de la figure (17) et que nous contraignons de plus l'aiguille de notre système à rester dans le plan horizontal, nous obtenons une boussole ordinaire.

Cette opération revient, mathématiquement, à imposer à la variable θ la valeur $\pi/2$ dans le lagrangien qui perd une variable et se réduit à :

$$(33') \quad \mathcal{L} = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\psi}^2 + k B \mathcal{M} \sin \alpha \cos \psi$$

dont on déduit l'équation bien connue

$$(34') \quad \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\psi} + kBM \sin \alpha \sin \psi = 0$$

et dont nous discuterons également de l'interprétation.

QUELQUES REMARQUES, EN GUISE DE CONCLUSION, SUR L'INTERPRÉTATION DES ÉQUATIONS OBTENUES.

- On ne sait pas exprimer à l'aide de fonctions élémentaires les solutions l'équation du pendule. Il en est donc de même de celles de l'équation (34') ; il paraît donc utopique de tenter de le faire pour l'équation (34). Mais comme chacun peut constater qu'une boussole oscille autour de sa position d'équilibre azimutale ψ tout en restant peu éloignée de la direction de sa déclinaison α , il est logique de rechercher des solutions de (34) proches de α pour ψ "petit".

Portons donc dans le système (34) $\theta = \alpha + h$ et essayons de le résoudre au premier ordre en h et en ψ . Si nous négligeons les termes en d'ordre 2, c'est-à-dire en ψ^2 , h^2 , ψh , $\dot{\psi} h$, la première équation se réduit à :

$$\frac{1}{3}m\ell^2 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin^2 \alpha) + kBM \sin^2 \alpha \psi = 0$$

Autrement dit, h et α s'élimine pour donner

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\psi} + kBM\psi = 0$$

qui est du type oscillateur harmonique. La seconde équation quant à elle s'écrit :

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{h} - kBM (\sin \alpha \cos \psi (\cos \alpha - h \sin \alpha) - \cos \alpha (\sin \alpha + h \cos \alpha)) = 0$$

Là, ce sont α et ψ qui s'éliminent pour donner

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{h} + kBMh = 0$$

équation qui est également du type oscillateur harmonique. Le système (34) s'écrit donc au premier ordre :

$$(34'') \quad \begin{aligned} \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\psi} + kBM\psi &= 0 \\ \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{h} + kBMh &= 0 \end{aligned}$$

Il se découple donc en deux oscillateurs indépendants, mais qui vibrent avec la même pulsation

$$\omega = \frac{3kBM}{m\ell^2}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Au premier ordre, une solution des équations du mouvement d'une aiguille aimantée suspendue dans le champ magnétique terrestre correspond pour la variable ψ à celle d'un oscillateur harmonique de période

$$T = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3kBM}{2\pi m\ell^2}$$

L'autre variable, θ , oscille aussi harmoniquement avec la même période autour de la variable α qui correspond à la direction nord-sud du champ magnétique terrestre.

- Il est intéressant de comparer les équations d'une boussole horizontale (34')

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\psi} + kBM \sin \alpha \sin \psi = 0$$

avec celle correspondante d'une aiguille aimantée suspendue et de mêmes caractéristiques (la première équation de 19'').

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\psi} + kBM\psi = 0$$

Au premier ordre près en ψ , ce sont les mêmes à ceci près que celle de la boussole horizontale contient $B \sin \alpha$ au lieu de B dans l'autre. Or $B \sin \alpha$ est d'après (32) la projection du champ magnétique terrestre sur le plan horizontal.

Nous retrouvons bien le résultat attendu : *au premier ordre, seule la composante horizontale du champ magnétique terrestre intervient sur le mouvement d'une aiguille aimantée horizontale. Les précessions des deux mouvements oscillent de façon harmonique, mais les périodes de ces deux mouvements sont proportionnelles au sinus de la déclinaison.*

La vérification expérimentale de cette propriété peut être considérée comme une preuve du caractère vectoriel du champ magnétique.

Remerciements.

L'auteur remercie sincèrement Claude Piquet de l'université Pierre et Marie Curie (Paris6) pour la relecture critique de ce travail et pour le soin et la précision avec lesquels il a tracé les figures 6 et 8 et que ma technique d'utilisation de \TeX ne met pas particulièrement en valeur.

L'auteur a eu également de longues et passionnantes discussions sur le magnétisme avec Daniel Fargue de l'École des mines de Paris qu'il remercie également sincèrement espérant bien qu'elles ne sont pas terminées.

Bibliographie.

- [1] Les rotations sont étudiées dans d'innombrables livres de géométrie dont la plupart ne sont plus réédités et qui, pour beaucoup, accumulent de la poussière sur les rayons des bibliothèques. Chacun a les siens, souvent issus d'un cursus scolaire, voire universitaire, et chacun trouve que ce sont les meilleurs. Nous ne proposerons donc aucune référence, renvoyant pour les compléments qui les intéresseraient les lecteurs à leurs livres favoris.
- [2] Piquet Claude, *Isométries d'un espace vectoriel dans un autre*, <http://www.ann.jussieu.fr/~piquet/DIVERS.html>
- [3] Cabanes Henri, *Cours de Mécanique générale*, Dunod, Paris, 1962.
- [4] Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 7th printing, 1965.
- [5] Lichnérowicz André, *Éléments de calcul tensoriel*, Armand Colin, 7-ème édition, 1964.
- [6] Durand Émile, *Électrostatique et Magnétostatique*, Masson, 1953.
- [7] Jouguet Marc, *Traité d'électricité théorique*, tome 2, 1955, Gauthier-Villars Éditeur.