Grandeurs physiques et Unités

Michel Karatchentzeff

Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris
(29 mai 2010 – version 1.0)

Le but de ce mémoire est de fournir au lecteur d'ouvrages plus ou moins anciens, et donc rédigés avec d'autres système d'unités que le système international SI, les moyens de comprendre, voire de convertir les unités employées.

Nous nous contenterons donc de présenter quelques formes que peuvent prendre les unités associées aux principales grandeurs physiques, mais nous laisserons de côté celles du système international SI utilisé aujourd'hui et que le lecteur trouvera sur le site du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) [1].

Ce texte est dédié à tous ceux, élèves et professeurs, qui ont souffert avec le système MK_pS.

Des hommes, des mesures et des unités.

De tout temps, les hommes ont associé à leurs commerces, à leurs trocs, à leurs monnaies, à leurs legs, à leurs transactions,... des nombres pour chiffrer les quantités de grains, de vins, d'huiles, les surfaces des terrains, les taux des prêts,... qui étaient en jeu.

Ces nombres correspondaient à des multiples de quantités adaptées à ce dont il était question, qui servaient de référence et qui, par la suite, prendront le nom générique d'unités.

Ces unités ont donc existé de tout temps, et on peut les regrouper en de grandes classes qui correspondent aux notions intuitives de longueur, de volume, de surface, de poids, de durée ...et que les physiciens appellent maintenant « grandeurs physiques ». Il ne faudrait pas croire que ces unités avaient été créées sans logique ; elles étaient parfaitement appropriées au groupe qui les utilisait localement. C'est dans leur ensemble que ces unités de mesure formaient un chaos indescriptible. Elles avaient été choisies librement, de façon indépendante les unes des autres, et si l'on comprend assez facilement que, sous l'Ancien Régime, en France ou ailleurs,

- la *toise* était l'unité de longueur,
- la *perche* celle de mesure agraire,
- la *livre* celle de mesure de poids,
- le *setier* celle de capacité

il faut quand même savoir que, suivant les provinces, les mêmes appellations d'unités pouvaient désigner des valeurs différentes, et, qu'en un même lieu, la valeur d'une unité pouvait varier avec la nature de la matière à mesurer. De plus, les multiples et sous-multiples de ces unités disparates n'avaient pas d'échelle cohérente : un *grain* correspondant actuellement à 0,053 g, avait pour multiple le *gros* (72 *grains*), qui avait pour multiple l'*once* (8 *gros*), qui avait pour multiple le *marc* (8 *onces*), qui avait pour multiple la *livre* (16 *onces*), qui avait pour multiple le *tonneau* (2000 *livres*)...

Au total, vers la fin du XVIII[e], il existait plus de deux mille unités dans le royaume de France.

Il ne faudrait pas croire non plus que personne n'ait cherché à remédier à cet état de fait. En France toujours (XVII[e] siècle, XVIII[e] siècle), pour gérer leur royaume, les rois essayaient d'imposer les mêmes unités sur tout le territoire, les mesures de Paris ; ils avaient exigé qu'elles soient utilisées par les services centralisés comme les Ateliers Monétaires, les Eaux et Forêts, ...Battre monnaie était une façon de tenter d'unifier ces quantités disparates.

À la même époque, les savants ressentaient, eux aussi, la nécessité d'utiliser un système unique facilitant la comparaison de leurs mesures et nombre d'entre eux avaient choisi pour exprimer leurs résultats les mesures de Paris.

Les préoccupations des gestionnaires du royaume et celles des savants avaient donc beaucoup de points communs, même si les finalités de chacun divergeaient : la cartographie développait les méthodes d'arpentage et précisait la connaissance du royaume ; l'étude des éléments, densimétrie par exemple, approfondissait les connaissances sur les alliages et permettait de mieux contrôler la fraude sur les monnaies, l'augmentation de la précision des mesures astronomiques requerrait celles de la mesure du temps et donc des horloges ou montres marines que les navires utilisaient pour se repérer ...

Tout concourait donc pour qu'une réforme des mesures soit lancée avec succès. L'idée qui germait à ce moment là était que le système qui devait être développé pour remplacer ceux qui existaient devait avoir des unités reliées à des mesures terrestres. Pour cela, il fallait un étalon de longueur[1]. Il y avait alors près d'un siècle que l'abbé Mouton, astronome, avait proposé que l'on utilisât un méridien pour définir l'unité de longueur. On a commencé par mesurer la longueur d'arcs de méridiens, puis on en a recommencé les mesures en augmentant leur précision.

Ces mesures étaient longues, le temps passait, et c'est l'Assemblée Nationale, sur proposition du 19 mars 1791 de l'Académie, qui a entériné[2] la définition du mètre (du grec $\mu\epsilon\tau\rho o\nu$ metron, mesure) le 26 mars 1791, décision ratifiée par Louis XVI le 30 mars 1791 [2].

Pendant ce temps, la science progressait et les scientifiques s'étaient aperçu que les diverses quantités physiques correspondant au développement de la mécanique de Newton pouvaient s'exprimer à partir de seulement de trois quantités de base relativement arbitraires. la notion de système d'unités apparaissait progressivement.

À partir du mètre, il était facile de définir une unité de volume, le litre (du grec $\lambda\iota\tau\rho o\nu$ litron, litre), puis le poids de cette unité de volume lorsqu'il était rempli d'eau à une

---

[1] C'était bien un étalon que l'on recherchait, c'est-à-dire un modèle universel servant de référence à tous les pays et fournissant la valeur d'une unité déterminée ; d'où l'idée de la longueur du méridien qui ne privilégiait personne.

[2] Ce n'était que le premier pas législatif en France ; il en a été suivi de beaucoup d'autres : adoption d'un nouveau système des poids et mesures et de leurs dénominations (01 août 1793), adoption du système métrique (7 avril 1795), du système MTS (1919), etc.

température donnée et que l'on a appelé kilogramme-poids (gramme vient du grec $\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$ gramma, petit poids). Par ailleurs, la navigation et l'astronomie avaient besoin de mesures plus précises du temps, d'où la nécessité de disposer d'étalons de temps.

Ce qui était très important, c'était que toutes ces unités avaient des multiples et sous-multiples décimaux, autrement dit que l'on avait introduit le système décimal à l'intérieur du système d'unités. On disposait alors d'un système cohérent à partir duquel on était capable de décrire la plupart des quantités dont on avait besoin à l'époque.

Tout concourait à la création d'un système d'unités : ce fut le système MK_fS, dit système métrique.

Le système métrique a pris le temps de s'installer. En France, il mit près d'un siècle. Le monde scientifique l'adopta beaucoup plus vite, avec des variantes cependant, le critiqua (constructivement) et mis en évidence quelques faiblesses : tel quel, il pouvait être amélioré.

Pendant ce temps, les connaissances en physique avaient continué d'augmenter à nouveau et des phénomènes nouveaux avaient été étudiés. Coulomb avait mesuré quantitativement les effets des charges électriques et magnétiques mettant en évidence les lois qui portent son nom. Grâce à la pile de Volta, l'étude de l'électricité et du magnétisme avait fortement progressé. Les physiciens avaient besoin d'unités nouvelles pour décrire ces phénomènes et le système métrique, créé pour la mécanique, ne suffisait plus.

Enfin, il fallait convaincre, ou essayer de le faire, les représentants de toutes les nations de la nécessité d'utiliser un système d'unités cohérent et mondial.

C'est pourquoi, en 1870, la France accueille au Conservatoire National des Arts et Métiers les représentants de différents États dans une « Commission internationale du mètre » dont les travaux, du fait de la guerre seront reportés de 1872 à 1875. Le 20 mai 1875, dix-sept pays[3] signent la « Convention du Mètre » qui crée un ensemble d'organismes chargés d'assurer l'uniformité des mesures physiques dans le monde :

- le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), laboratoire installé au Pavillon de Breteuil à Sèvres, France ;
- le Comité International des Poids et Mesures (CIPM) qui contrôle le BIPM et prépare les décisions et les recommandations ;
- la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) qui se réunit à Paris tous les quatre ans environ, représente les états signataires et ratifie les décisions du CIPM.

Comme le choix des unités fondamentales de l'électromagnétisme n'était pas unique, et pour éviter qu'une confusion ne s'installe, un *Congrès International des Électriciens* s'est réuni à Paris en octobre 1881, a adopté le système CGS [4] dont nous parlerons, lui a adjoint quelques unités électriques et, en particulier, a donné le nom d'Ampère à l'unité d'intensité du courant électrique.

[3] En 2006, on comptait cinquante et un états membres :
`http://www.bipm.org/fr/convention/member_states/`

[4] Ce système avait été proposé vingt ans plus tôt par l'Association britannique pour l'avancement des sciences.

C'était une première étape vers une unification (rationalisation) des unités. Le flambeau a été ensuite repris par les réunions du CGPM dont la première s'est tenue à Paris en septembre 1889 et où les unités de base ont été redéfinies. Les réunions suivantes du CGPM (la 22ème a eu lieu en octobre 2003), de concert avec le CIPM ont pris en charge l'évolution des définitions des unités, donc de leurs mesures.

Par la suite, au début du XX$^{\mathrm{e}}$, le système MKSA rationalisé voit le jour, puis, progressivement un système international (SI) basé sur les unités de sept grandeurs physiques : longueur, masse, temps, intensité du courant électrique, température thermodynamique, quantité de matière et intensité lumineuse.

Toute cette évolution est parfaitement détaillée sur le site du BIPM [1] ; elle n'a été exposée ici que pour expliquer pourquoi elle n'a pu être qu'extrêmement lente puisqu'elle ne pouvait s'appuyer pour progresser que sur les progrès de la physique qui, pour s'exprimer, avaient besoin de systèmes d'unités. C'est ce qui explique la diversité des systèmes d'unités utilisés au cours de ces deux derniers siècles et la nécessité, puisque nos plus grands savants les ont utilisés, de savoir passer de l'un à l'autre. Mais pour ce faire, nous avons besoin de la notion de grandeur physique.

Grandeurs physiques, Unités et Système d'unités.

Bilan et apparition progressive de la notion de grandeur physique

Le bref historique précédent ne voulait que sensibiliser le lecteur aux principales difficultés qui ont jalonné l'élaboration d'un système international d'unités, difficultés qui peuvent se résumer par

- une multitude d'unités locales relevant des coutumes sur le plan politique ;
- une évolution conjointe sur le plan scientifique des sciences physiques théoriques et expérimentales et qui requéraient de nouvelles unités ;
- les difficiles et longues mesures expérimentales des étalons sur le plan technique.

Le tout explique pourquoi il a fallu plusieurs siècles pour en venir à bout, mais aussi pourquoi nous pouvons constater qu'aujourd'hui, nous sommes particulièrement bien placés pour faire le point sur ces questions.

Au cours des siècles, les physiciens, les chimistes ont énormément progressé dans la connaissance des lois de la nature en passant d'expériences qualitatives comme celle de la sphère de Magdebourg, de la charge et de la décharge des bouteilles de Leyde . . . à des expériences quantitatives qui mettaient en valeur des entités comme la pression, la charge électrique, la densité, la température et qui conduisaient à l'énoncé de lois comme celle de la gravitation ou celles de Coulomb pour les charges électriques ou magnétiques.

De ce fait, ces entités, ignorées jusque là, prenaient une importance de plus en plus grande, ce qui justifiait une connaissance accrue de leurs propriétés et donc des expériences plus précises permettant de les connaître davantage.

En même temps, d'autres entités et d'autres théories voyaient le jour, reliant certaines de ces entités entre elles dans des formulations où les mathématiques jouaient un rôle de plus en plus important.

Ce sont ces entités qui, au cours du temps, ont pris le nom de « grandeurs physiques » (*quantities*, en anglais). Ces grandeurs physiques associent alors expériences, et donc appareils de mesure, résultat des expériences, et donc unités, et relations mathématiques qui les relient entre elles.

Vu le vaste choix possible d'unités du même type, il est évident que si l'on peut éviter de faire état de ces dernières, on ne peut que simplifier le propos, et donc le rendre plus clair. C'est, bien sûr, ce que l'on fait au début des théories où les grandeurs physiques interviennent dans des relations de type algébrique, comme la loi de Mariotte, où il est préférable de laisser les unités indéterminées, ce qui permet, de plus, aux expressions obtenues de pouvoir être utilisées dans n'importe quel type de système d'unités.

Mais la physique étant d'abord, et avant tout, une science expérimentale, il faudra bien, à un moment ou à un autre, relier les théories à l'expérience où les valeurs des mesures faites ou attendues seront associées à des unités. Ces dernières interviendront également lorsqu'il s'agira de comparer des résultats expérimentaux obtenus dans des lieux divers.

Il résulte de tout cela qu'à toute expression définissant une grandeur physique sera associée une expression donnant la valeur de la mesure de cette grandeur dans une unité donnée.

Cela dit, il n'est pas évident que la notion de grandeur physique en tant que telle ait un sens. Leur nature est un vaste sujet qui demeure vraisemblablement encore ouvert et les plus grands physiciens ne l'ont pas dédaigné. Jean-Baptiste Joseph Fourier a introduit, dans sa théorie analytique de la chaleur [3], la notion « d'équation aux dimensions » (avec un 's') dans les équations de la physique ; il a montré l'importance de cette notion et en a fait la théorie. Après lui, James Clerck Maxwell [4] y a consacré les premières pages de son traité sur l'électricité et le magnétisme où il a esquissé un premier classement[5] des grandeurs physiques, y associant certaines propriétés de symétrie que Pierre Curie [5] développera en les généralisant aux effets les produisant.

S'il n'est pas évident que, dans l'absolu, la notion de grandeur physique ait un sens, ce n'est par contre pas le cas pour une grandeur physique donnée, comme une longueur ou une pression. Il est toujours possible de la définir en énonçant les procédés par lesquels on peut la mesurer en la reliant à une autre grandeur de la même espèce. Le plus souvent, c'est le rapport entre les mesures de ces deux grandeurs que l'on effectue, et le résultat est donc une valeur numérique. Les procédés qui servent à obtenir cette mesure correspondent à une phrase explicative servant sans ambiguïté de définition de la grandeur physique en question. Ils peuvent être remplacés par une formule mathématique définissant la grandeur par rapport à d'autres grandeurs.

En conséquence, si on choisit, par pure convention, un objet particulier représentatif de cette grandeur que l'on appelle « type d'unité » et dont les valeurs s'appellent « unités », le rapport entre la mesure d'une grandeur quelconque de même espèce et de l'unité est un nombre.

C'est en ce sens que Maxwell [4] disait que la valeur de toute grandeur physique est le produit d'un nombre pur et d'une unité, ce qui permet de définir une grandeur physique conventionnelle. Comme toutes les grandeurs, c'est un concept abstrait. Nous suivrons donc Maxwell dans cette démarche, même si elle ne suffit pas pour caractériser une

[5] Il semble bien que le classement complet de toutes les grandeurs physiques reste à faire.

grandeur physique en tant que telle, et nous adopterons la définition plus complète du paragraphe suivant.

Le concept de grandeur physique

Une grandeur physique est une propriété issue soit du monde qui nous entoure, soit de notre perception ; elle n'est définie que si elle peut être associée au résultat d'une mesure, ce qui signifie
- qu'elle a été comparée avec une grandeur de même nature, prise comme référence, à l'aide d'un appareillage appelé *instrument de mesure* ;
- que le résultat de cette comparaison est exprimé par une « valeur numérique » associée à une unité qui rappelle la nature de la référence et qui est de la même espèce [6] ; la « valeur numérique » est un nombre qui exprime le nombre de fois que cette unité est prise pour obtenir la quantité dont on parle ;
- que ce résultat est assorti d'une incertitude qui dépend à la fois des qualités de l'expérience effectuée, de la connaissance que l'on a de la référence et de ses conditions d'utilisation ;
- que la reproductibilité du résultat est garantie dans le domaine d'incertitude fourni ;
- et qu'enfin tous les éléments nécessaires ont été donnés pour que quiconque puisse reproduire cette mesure.

En réalité, ce qui vient d'être défini comme « mesure physique » dépasse de loin une simple définition. C'est un concept qui vient d'être introduit et qui était loin, au XVIII^{e} siècle, d'en être au stade où il en est de nos jours ; ce qui ne veut pas dire qu'à l'époque, cette notion n'était pas précise ; simplement on n'avait pas encore compris les liens qui unissent la précision, les valeurs des unités et les théories qui ont été à la base d'un nouveau chapitre des sciences : la métrologie.

Cette définition, ce concept, admet immédiatement un certain nombre de corollaires ou de remarques :
- il existe des liens qui unissent la précision, les valeurs des unités et les théories qui sont à la base de la mesure.
- l'appareillage est issu de la ou des théories qui justifient la prise de mesure.
- par la théorie qui préside à la définition de cette grandeur, il existe des relations liant algébriquement cette grandeur à d'autres grandeurs physiques et dont certaines permettent de définir mathématiquement cette grandeur. Par exemple, la loi d'Ohm

$$V = R\,I$$

  est tout à fait apte à définir la grandeur physique « différence de potentiel » si les grandeurs « résistance (R) » et « intensité (I) » ont été préalablement définies.
- Fourier a remarqué qu'à partir des formules du type ci-dessus, on pouvait dériver une relation entre les différentes grandeurs employées. C'est ce qu'on appelle l'*équation aux dimensions* et qui permet de déterminer le type d'une grandeur inconnue. Son

[6] Cette propriété, associée à la précédente, traduit en particulier le fait que la grandeur en question est comparable à une autre de même nature (notion d'égalité) et qu'on sait les additionner (additivité).

importance est telle qu'il faut l'associer au concept de grandeur physique et c'est pourquoi nous allons développer ses propriétés.

Équation aux dimensions, Équation aux puissances

De la définition ci-dessus, il s'ensuit qu'une grandeur physique quelconque G pourra toujours se mettre sous la forme :

$$G = \underline{g}\ [G] \tag{1}$$

où
- G et [G] sont des entités du même type ;
- [G] s'appelle le « type d'unité de G » et peut prendre toute une série de valeurs appelées *unités* ; c'est le tableau de toutes les unités possibles de la grandeur physique ;
- $\underline{g}$ est une fonction à valeur réelle qui, lorsqu'on choisit l'unité U parmi celles de [G], prend la valeur g. g représente la valeur de la mesure de G exprimée dans l'unité U ; g est alors le nombre de fois qu'il faut ajouter l'unité U pour obtenir la mesure de G, [7]

ce qui s'écrit

$$\text{valeur de la mesure de la grandeur } G = \text{mes}(G) = g\ U \tag{2}$$

et se lit :

La valeur de la mesure de la grandeur G est g en unités U.
Nous abrégerons par la suite « valeur de la mesure de la grandeur G » en « mesure de G ».

Illustrons cette définition par l'exemple d'une table dont le plateau est rectangulaire. Cette table peut être caractérisée par un certain nombre de propriétés, comme sa hauteur, le matériau dont elle est faite, etc. Intéressons nous à la largeur du plateau de cette table ; c'est une grandeur physique associée à une longueur et la formule (1) peut s'écrire dans ce cas :

$$\text{largeur du plateau} = \underline{\ell}\ [\text{longueurs}]$$

Pour avoir la mesure de cette largeur ℓ, il nous faut choisir une unité, disons le mètre ($U = 1$ m). Dans ces conditions, et en admettant que ce mètre est contenu une fois et demi dans la largeur du tableau de la table, nous pouvons écrire la formule (2)

$$\text{mes(largeur du plateau)} = 1,5 \text{ m} \quad .$$

Revenons maintenant à notre définition en faisant remarquer que les égalités dans les formules (1) et (2) ne correspondent pas à des ensembles de même type. En (1), il s'agit d'une égalité entre grandeurs physiques, en (2), entre unités.

---

[7] Pour cette raison, nous appellerons « compteur », la « fonction de mesure » $\underline{g}$.

Étudions maintenant quelques conséquences de cette définition. Si nous choisissons une autre unité U', nous pouvons écrire

$$\mathrm{mes}(G) = g'\ U'$$

Comme toutes les unités correspondant à une même grandeur physique sont parfaitement reliées entre elles, U' s'exprime en fonction de U par une relation linéaire issue des tables de conversions et que l'on notera

$$U' = \left[\frac{U'}{U}\right]\ U$$

le crochet indiquant que le rapport des unités est calculé dans l'une quelconque des unités. Ce qui vient d'être dit pour U' en fonction de U se dit également pour U en fonction de U', et nous avons

$$U = \left[\frac{U}{U'}\right]\ U' \quad \text{avec} \quad \left[\frac{U}{U'}\right] \times \left[\frac{U'}{U}\right] = 1 \tag{3}$$

par définition même des tables de conversion.

Nous en déduisons que la mesure de G dans l'unité U peut s'écrire

$$\mathrm{mes}(G) = g'\ U' = g'\ \left[\frac{U'}{U}\right]\ U = g\ U \quad \text{soit} \quad g'\ \left[\frac{U'}{U}\right] = g$$

d'après l'unicité du résultat de cette mesure. En utilisant (3) nous obtenons les relations fondamentales qui sont à la base des changements d'unité :

$$g' = \left[\frac{U}{U'}\right]\ g \quad \text{et} \quad U' = \left[\frac{U'}{U}\right]\ U \tag{4}$$

où g' est la valeur de la mesure de G dans l'unité U', et g, celle qui lui correspond dans l'unité U. Nous retrouvons bien le fait que les valeurs des grandeurs varient en sens inverse des unités.

La première équation est une équation entre nombres réels. La seconde est une relation entre unités ; elle signifie que la mesure de l'unité U' avec l'unité U vaut $\left[\frac{U'}{U}\right]$

Il n'est pas inutile de donner un exemple pour illustrer ces définitions et leurs conséquences. Avec les définitions précédentes, la grandeur physique longueur ℓ s'écrit d'après (1)

$$\ell = \underline{\ell}\ [\ell]$$

Supposons que nous mesurions la longueur d'un segment de droite en milles marins et que nous trouvions 3,5 milles marins. En détaillant la phrase précédente, cela signifie que nous avons choisi une unité, le mille marin (U') parmi les valeurs possibles des longueurs $[\ell]$ et que la valeur de la mesure de ℓ vaut

$$\mathrm{mes}(\ell) = 3,5 \text{ milles marins} = 3,5\,U.$$

Si maintenant, nous cherchons à exprimer cette longueur en kilomètres (U'), les tables de conversions nous indiquent que[8]

$$\left[\frac{U}{U'}\right] = \left[\frac{1 \text{ mille}}{1 \text{ km}}\right] = \frac{1,852 \text{ km}}{1 \text{ km}} = \frac{1 \text{ mille}}{\dfrac{1}{1,852} \text{ mille}}$$

et donc que, d'après (4)

$$g' = g \, \left[\frac{U}{U'}\right] = 3,5 \times 1,852 \text{ km} = 6,482 \text{ km}$$

Ce qui est le résultat cherché. À remarquer que nous aurions même pu utiliser une unité intermédiaire (centimètre, pied, ...) pour calculer le rapport des unités, ce qui n'aurait rien changé, sinon de faire quelques calculs de plus.

Effectuons maintenant un pas de plus dans les propriétés issues de la définition d'une grandeur G. Cette grandeur est liée à d'autres grandeurs physiques par une formule algébrique qui, dans certains cas, peut servir de définition de G, formule dans laquelle nous pouvons introduire la valeur de chaque grandeur. Donnons deux exemples dans lesquels nous ne définirons pas les symboles employés car leur signification est évidente.

- D'après la théorie de la mesure, la grandeur A, « aire » d'un carré dont la grandeur du côté est ℓ, s'exprime par la formule :

$$A = \ell^2$$

ce qui s'écrit :

$$A = \underline{a} \, [A] = \ell^2 = \ell \times \ell = \underline{\ell} \, [\ell] \, \underline{\ell} \, [\ell] = \underline{\ell}^2 \, [\ell]^2$$

où nous sommes convenus que nous puissions regrouper compteurs (voir note 7) d'une part, types d'unité d'autre part et que nous appliquions à chaque groupe les règles usuelles de l'algèbre [9]. Nous pouvons donc écrire :

$$\underline{a} \, [A] = \underline{\ell}^2 \, [\ell]^2$$

Comme $\underline{a}$ représente le compteur de la grandeur « aire du carré de côté $\underline{\ell}$ », $\underline{a} = \underline{\ell}^2$ (puisque cette relation est vraie pour chaque choix d'unité), et nous pouvons « simplifier » les compteurs dans la relation ci-dessus qui devient

(5-a) $$[A] = [\ell]^2$$

---

[8] En réalité, le mille marin (en anglais, *nautical mile*) est par définition égal à la longueur de la minute sexagésimale (1/60 ème de degré d'arc) du méridien à la latitude de 45°. Il vaut donc théoriquement 1851,85 m et c'est par convention que la valeur 1852 mètres a été choisie.

[9] C'est évident pour les types d'unités puisque ce sont des grandeurs physiques. C'est également vrai pour les compteurs parce que ce sont des fonctions numériques et que c'est vrai pour chacune de leurs valeurs. Nous avons donc ici ($\underline{\ell} \, \underline{\ell} = \underline{\ell}^2$).

C'est une relation entre types d'unités et qui s'exprime en disant que *le type d'unité d'une surface est le carré du type d'unité d'une longueur.* Cette notation n'est pratique que si on choisit la même unité pour mesurer chaque côté.

- Prenons maintenant comme exemple la loi fondamentale de la dynamique

$$F = m\gamma$$

en procédant de même que ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$F = \underline{m}\ [m]\ \underline{\gamma}\ [\gamma] = \underline{m}\ \underline{\gamma}\ [m]\ [\gamma]$$

et puisque les compteurs $\underline{F}$ et $\underline{m\gamma}$ donnent les mêmes valeurs et qu'elles se simplifient, nous aboutissons à la relation

(5-b) $$[F] = [m]\ [\gamma]$$

qui lie les types d'unités de force à ceux de masse et d'accélération.

En général, lorsqu'elles sont reliées entre elles, les grandeurs physiques le sont par l'intermédiaire de polynômes (homogènes) [10] où elles interviennent dans chaque monôme par des multiplications ou des élévations à une puissance quelconque. C'est d'ailleurs ce qui permet dans certains cas de définir une nouvelle grandeur physique. Dans ce cas, en effet, si A, B, C, D,... sont des grandeurs physiques, la relation est alors du type

(6) $$A = k\ B^\beta\ C^\gamma\ D^\delta \dots$$

où k est un nombre réel, β, γ, δ,... sont des fractions positives ou négatives. Par le même raisonnement que ci-dessus, nous pourrons écrire d'après (1)

$$A = \underline{a}\ [A] = k\ \underline{b}^\beta\ \underline{c}^\gamma\ \underline{d}^\delta\ \dots [B]^\beta\ [C]^\gamma\ [D]^\delta\ \dots$$

et puisque

$$\underline{a} = k\ \underline{b}^\beta\ \underline{c}^\gamma\ \underline{d}^\delta\ \dots$$

la relation entre les types d'unités ci-dessus s'écrit

(7) $$[A] = [B]^\beta\ [C]^\gamma\ [D]^\delta\ \dots$$

Dans la littérature, les relations (5-a), (5-b) ou (7) sont dites « équation aux dimensions ».

L'expérience montre que ce n'est pas une bonne dénomination et voici deux des raisons qui expliquent pourquoi :

La première est que, historiquement, le mot « dimension » est associé à chacune des puissances β, γ, δ, ...de la relation (7) ; il indique de quelle façon l'unité associée

[10] Cette hypothèse assure le fait qu'on ne peut additionner que des grandeurs physiques du même type.

à A dépend des différents types d'unités ; plus une puissance est grande par rapport aux autres puissances, plus l'unité correspondante a d'importance. Il aurait donc été plus inspiré d'appeler l'équation (7) « équation aux puissances ». Et c'est ce que nous ferons par la suite tout en rappelant à chaque fois, pour faciliter la lecture, le nom habituellement utilisé.

La seconde raison est que, par métaphore ou par métonymie, on parle de « dimension de A » pour le membre de gauche $[A]$, oubliant en particulier le 's' de l'équation aux dimensions. Pour éviter toute confusion, nous pensons qu'il faut bannir le mot « dimension » et conserver la locution que nous avons déjà utilisée, à savoir « type d'unité » de A. C'est ce que nous ferons désormais.

L'équation aux puissances (dimensions) (6) lie donc les types d'unité de la grandeur physique A à ceux des grandeurs B, C, D, ...

Par ailleurs, la définition (6) de A peut tout aussi bien s'écrire

$$\frac{A}{B^\beta \; C^\gamma \; D^\delta \ldots} = k$$

le numérateur et le dénominateur ayant le même type d'unité, celui associé au nombre réel $[k]$ vaut 1 ; il correspond donc à $[k]^0$, et donc que la puissance (dimension) associée à un nombre réel[11] est 0.

En corollaire, si des grandeurs physiques interviennent dans l'argument d'une fonction numérique, le type d'unité de cet argument doit être 1 (ou sa puissance doit être 0), puisque cet argument doit être un nombre. Par exemple l'expression $\sin(\omega t + \phi)$ impose $[\omega t + \phi] = 1$. Il en est de même pour la valeur de la fonction numérique.

La connaissance d'un type d'unité (dimension) fournit de plus un test sur l'exactitude d'une formule physique quelconque : s'il n'y a pas cohérence dans ces types, la formule est fausse.

Unités et étalons

La notion d'unité est associée au concept de grandeur physique, mais chaque type d'unité peut avoir diverses représentations. Par exemple :

- les unités associées à la grandeur physique « longueur » peuvent être le mètre, le mille, l'année lumière, l'ångström, le pied, le pouce, le perche, ... ;
- celles associées à la grandeur « volume » peuvent être le litre, le mètre cube, le gallon, le baril (*barrel*), ... ;
- ...

et les expressions correspondantes s'écriront :

3,50 mètres ; 125 kilogrammes ; 3600 secondes ; ...

[11] Attention ! Ce qui est écrit ci-dessus n'est valable que pour les nombres réels. Les formules de définition peuvent très bien contenir des constantes qui ont des types d'unité bien définis. Nous verrons plus loin que c'est, par exemple, le cas des lois de l'électricité et du magnétisme de Coulomb.

Actuellement, comme nous l'avons déjà dit, toutes les unités correspondant à une même grandeur physique sont parfaitement reliées entre elles (1 mille marin = 1852 m ; 1 pied = 12 pouces ; 1 baril = 158,98729 litres ; etc.) et de nombreux ouvrages contiennent des tables de correspondances et détaillent ces liens [6].

Profitons en pour rappeler la remarque déjà faite à propos de la seconde égalité (4) qui est exactement de même nature : lorsque l'on dit : « 1 pied = 12 pouces », il ne s'agit pas d'une égalité au sens mathématique du terme, mais d'un raccourci pour dire : « la longueur mesurée par un pied est égale à la longueur mesurée par 12 pouces » ; et que, pour obtenir une égalité mathématique, il est nécessaire d'introduire les valeurs de ces longueurs et la correspondance entre pied et pouce donnant la valeur de l'une de ces unités en fonction de l'autre. C'est ce qui est exprimé par la formule (4) qui est une forme très élémentaire de l'expression d'une fonction de fonction.

Cela dit, il ne suffit pas d'avoir choisi une unité pour une quantité physique donnée. En physique, une expérience n'ayant de sens que si elle est reproductible, il faut aussi que la valeur de cette unité puisse être retrouvée expérimentalement partout où l'on peut en avoir besoin, ce qui s'exprime en disant qu'il faut assurer l'universalité de cette unité.

La métrologie répond à cette question en proposant la construction de ce qu'on appelle un *étalon* qui matérialise cette unité par une mesure dite absolue, c'est-à-dire effectuée sur la base directe de la définition de l'unité sans qu'il soit besoin de la comparer à un étalon préexistant.

L'avantage de cette méthode est que, non seulement elle est reproductible en n'importe quel lieu, mais surtout qu'elle permet d'utiliser les progrès des techniques et de la science pour proposer régulièrement des étalons plus précis. Nous ne détaillerons pas plus avant ce domaine et le lecteur intéressé trouvera définitions, détails des appareils, méthodes de comparaisons et références dans l'*Encyclopédie scientifique de l'Univers* [8] du Bureau des Longitudes et dans de nombreux autres ouvrages.

Pour ce qu'on appelle la « petite histoire », la plus ancienne référence que nous avons pu trouver d'une proposition de définition du mètre à partir d'une longueur d'onde est due à Maxwell, encore lui, qui suggère en 1873 :

In the present state of science the most universal standard of length which we could assume, would be the wave length in vacuum of a particular kind of light, emitted by some widely diffused substance such as sodium, which has well-defined lines in its spectrum. Such a standard would be independant of any changes in the dimensions of the earth, and should be adopted by those who expect their writings to be more permanent than that body.

Le voeu de Maxwell a été exaucé, mais en 1960 seulement, le temps que la technique ait pu rejoindre les idées, le krypton ayant remplacé le sodium. Et, depuis cette date, les savants du BIPM ont proposé mieux [8]...

Unités fondamentales et unités dérivées

Les unités peuvent être choisies librement et de façon indépendantes les unes des autres. mais il est pratique d'y introduire une certaine cohérence : s'il est toujours possible de mesurer les longueurs en mètres et les volumes en litres ou en baril par exemple, on a avantage à utiliser pour les volumes les m^3 qui permettent d'obtenir directement la valeur du volume d'une boîte rectangulaire en multipliant simplement ses côtés exprimés en mètres ; tout autre choix imposera une conversion supplémentaire.

Il en est de même pour les unités d'aire, et pour toutes les unités. C'est en poursuivant ce raisonnement qu'on en est arrivé à la notion d'*unité fondamentale* et d'*unité dérivée*. Par exemple, si le centimètre est choisi comme unité fondamentale, l'unité dérivée d'aire sera le centimètre carré (cm^2) et l'unité dérivée de volume sera le centimètre cube (cm^3). Mais il faut bien être conscient que ce choix d'unité fondamentale et d'unités dérivées est totalement arbitraire car il n'existe aucune raison physique pour trancher. C'est une pure question de convention.

Cela dit, et par souci de simplification, une fois une unité choisie, on lui imposera, si besoin est, de n'avoir que des multiples ou sous-multiples décimaux. C'est ce qui a été imposé dans le système métrique et c'est une des décisions dont les conséquences ont été les plus importantes pour ce système.

La notion de système d'unité

En poursuivant les travaux de Fourier sur les équations aux puissances (dimensions), les physiciens ont constaté que les grandeurs physiques pouvaient, toutes, s'exprimer à partir de quelques unes d'entre elles, essentiellement trois, pour ce qui concerne la mécanique newtonienne . Par exemple, en géométrie, les formules ne dépendent que de longueurs. Il suffit alors de considérer une grandeur fondamentale, qui sera la longueur, pour pouvoir déduire toutes les autres comme celle de l'aire ou celle du volume. De même en cinématique où l'on constate qu'il suffit de deux grandeurs fondamentales, la longueur et le temps pour en déduire les types d'unité des autres grandeurs physiques comme la vitesse et l'accélération. En dynamique, il faudra en ajouter une autre. Il en sera de même, mais pour d'autres raisons, pour l'étude des phénomènes électromagnétiques.

Il était donc logique de choisir certains types d'unités comme unités fondamentales pour mesurer les autres (unités dérivées) et constituer ainsi un système d'unités cohérent.

La longueur, la masse et le temps forment un choix de trois unités fondamentales[12] particulièrement bien adapté et permettent de définir ce qu'on appelle un « système d'unités mécaniques ».

Il est pratique de singulariser ces unités fondamentales en les désignant par les lettres L, M, T (sans crochets, ce qui facilite leur écriture), et comme nous l'avons déjà vu, chaque unité dérivée s'exprimera en fonction de ces unités fondamentales par son équation aux puissances (dimensions). Par exemple, le type d'unité associé à un volume sera notée L^3, celui associé à une vitesse LT^{-1}, etc.

[12] Mais ce n'est pas obligatoire : en physique nucléaire par exemple, on utilise souvent un système dont les unités de base sont la masse du proton, la vitesse de la lumière et la constante de Planck ; et il existe bien d'autres systèmes d'unités, en particulier le système MK_fS qui utilise le mètre, une force (le kilogramme-force) et la seconde.

Le problème des changements d'unité

Les changements d'unité(s) s'effectuent selon une méthode qui est, ce qui est tout à fait normal, totalement indépendante de la notion de système d'unités. Nous allons présenter cette méthode à partir de deux exemples avant de montrer comment il est possible de les généraliser.

Nous avons défini (1) une grandeur physique G par

$$G = \underline{g}\ [G] \qquad (1)$$

où $\underline{g}$ est le compteur (voir note 7) dont la valeur numérique g dépend du choix de la valeur U du type d'unité $[G]$; la valeur de la mesure de la grandeur G vaut alors $g\ U$ ($\text{mes}(G) = g\,U$).

Si nous changeons d'unité, nous avons montré que les valeurs des fonctions de mesures correspondantes sont reliées par la relation (4)

$$g' = \left[\frac{U}{U'}\right]\ g \quad \text{et} \quad U' = \left[\frac{U'}{U}\right]\ U \qquad (4)$$

où le crochet indique que le rapport des unités est calculé dans l'une quelconque des unités, et l'exemple précédent de la conversion milles marins ↔ kilomètres est un premier exemple élémentaire de changement de système d'unité.

Ces relations sont à la base des conversions dans les changements d'unités de la grandeur physique G. On les trouve aussi énoncées sous la forme :

Le rapport des valeurs numériques d'une même grandeur est égal au rapport inverse calculé dans une même unité des unités qui ont été employées pour les mesurer.

Étendons cette notion de changement d'unités en développant deux exemples.

Exemples :

- Considérons un système utilisant le centimètre, le gramme et la seconde (que nous appellerons ultérieurement CGS)
  - la vitesse V du son dans l'air vaut $v = 33\,100$ cm/s ;
  - l'accélération de la pesanteur vaut 981 cm/s^2 ;
  - le poids du cm^3 d'eau distillée à Paris vaut 981 dynes,

calculons les valeurs de ces mêmes variables dans un système basé sur le mètre, le kilogramme et l'heure (qui sera appelé MKH).

Cet exemple nous permet d'étendre la règle (4) au cas où une grandeur physique dépend de deux unités. Cette grandeur s'exprime alors sous la forme :

$$G = \underline{g}\ [G_1]\ [G_2]$$

où $\underline{g}$ dépend cette fois ci des deux types d'unités $[G_1]$ et $[G_2]$ et où, une fois choisies les unités pour $[G_1]$ et $[G_2]$, la mesure de G s'écrira

$$\text{mes}(G) = g\ U_1\ U_2$$

les notations ayant la même signification que précédemment.

Dans le cas d'un changement d'unités, les mêmes règles (4) s'appliquent pour chacune des unités

$$U_1' = \left[\frac{U_1'}{U_1}\right] U_1\,; \quad U_2' = \left[\frac{U_2'}{U_2}\right] U_2 \quad \text{ou} \quad U_1 = \left[\frac{U_1}{U_1'}\right] U_1'\,; \quad U_2 = \left[\frac{U_2}{U_2'}\right] U_2'$$

où les crochets ont la signification déjà décrite et indiquent que le rapport des unités est calculé dans l'une quelconque des unités. En reportant dans la mesure de G

$$g\ U_1\ U_2 = g'\ U_1'\ U_2' = g\ \left[\frac{U_1}{U_1'}\right]\ \left[\frac{U_2}{U_2'}\right]\ U_1'\ U_2'$$

et en identifiant les deux termes de la dernière égalité, ce qui est possible puisqu'ils portent sur les mêmes unités, nous obtenons :

$$g' = g\ \left[\frac{U_1}{U_1'}\right]\ \left[\frac{U_2}{U_2'}\right]$$

qui donne la valeur de la mesure de G dans les unités $U_1'\ U_2'$. Par ailleurs, les unités elles même se transforment comme :

$$U_1'\ U_2' = \left[\frac{U_1'}{U_1}\right]\ \left[\frac{U_2'}{U_2}\right]\ U_1\ U_2$$

En définitive, dans le cas d'un changement de système d'unités à deux unités de base, la transformation des valeurs des mesures des grandeurs physiques s'écrit donc

$$(8) \qquad g' = g\ \left[\frac{U_1}{U_1'}\right]\ \left[\frac{U_2}{U_2'}\right] \quad \text{et} \quad U_1'\ U_2' = \left[\frac{U_1'}{U_1}\right]\ \left[\frac{U_2'}{U_2}\right]\ U_1\ U_2$$

Ces relations sont la généralisation des équations (4) pour un système à deux unités de base. Elles se généralisent elles-même de façon évidente pour un nombre quelconque d'unités de base. On les appelle *relations fondamentales entre les systèmes d'unités.*

Appliquons tout cela à notre exemple :

Soit v' la vitesse du son dans le système MKH ; elle est exprimée en mètres par heure : $U_1' =$ mètre, $U_2' =$ heure^{-1} ;

soit v la vitesse du son dans le système CGS ; elle est exprimée en centimètres par seconde : $U_1 =$ centimètre, $U_2 =$ seconde^{-1} .

L'application de la formule (8) fournit v'

$$(9) \qquad \begin{aligned} v' &= v\ \left[\frac{U_1}{U_1'}\right]\ \left[\frac{U_2}{U_2'}\right] = v\ \left[\frac{1\ \text{cm}}{1\ \text{m}}\right] \cdot \left[\frac{1\ \text{s}^{-1}}{1\ \text{h}^{-1}}\right] = v\ \left[\frac{1\ \text{cm}}{1\ \text{m}}\right] \cdot \left[\frac{1\ \text{h}}{1\ \text{s}}\right] \\ &= v\ \frac{1\ \text{cm}}{100\ \text{cm}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{s}} = 36\ v = v' \end{aligned}$$

Donc $v' = 36 \times 33\,100$ m/h $= 1\,191\,600$ m/h.

Les crochets ont la même signification que dans l'exemple précédent et mettent en évidence les rapports des valeurs des unités du même type avant de les convertir dans la même unité[13].

Il existe une façon plus simple de parvenir au même résultat en considérant l'équation aux puissances (dimensions) de la grandeur physique en question. L'équation (9), comme l'équation (8) d'ailleurs) peut s'écrire :

$$\frac{v'}{v} = \left[\frac{U_1}{U_1'}\right] \left[\frac{U_2}{U_2'}\right] \tag{10}$$

En symbolisant, comme cela a été dit, la grandeur longueur par L et la grandeur temps par T qui forment un système d'unités fondamentales pour la vitesse, l'équation aux puissances (dimensions) de cette dernière s'écrira

$$[\mathrm{V}] = \mathrm{L}\ \mathrm{T}^{-1}$$

et on s'aperçoit alors que L et T correspondent aux crochets de l'équation (10) donnant le rapport de vitesses de v' et v. Il n'y a plus qu'à interpréter le premier membre pour obtenir la règle :

Pour obtenir le rapport entre les valeurs d'une grandeur physique écrite dans deux systèmes d'unité différents, il suffit d'écrire l'équation aux puissances (dimensions) de cette grandeur physique et de remplacer chacun des termes par le rapport des unités choisies exprimées dans la même unité. Les unités de ce rapport doivent être prises dans l'ordre inverse de celui du premier membre[14].

Cette règle n'est qu'une transposition de la relation fondamentale (8).

Passons à l'accélération dont les types d'unités correspondent à celles d'un vitesse divisée par un temps et dont l'équation aux puissances (dimensions) est :

$$[\gamma] = \left[\frac{dv}{dt}\right] = \left[\frac{\frac{\text{longueur}}{\text{temps}}}{\text{temps}}\right] = \mathrm{L}\ \mathrm{T}^{-2}$$

en admettant, comme précédemment que la longueur et le temps sont les grandeurs fondamentales.

---

[13] Comme dans l'exemple précédent, au lieu de convertir, par exemple, les longueurs en centimètres, nous aurions pu les convertir en mètres ; le résultat n'aurait pas changé puisqu'il s'agit du rapport des unités. De même pour les durées.

[14] Ce rapport par même type d'unité est tout à fait logique. C'est ce qui apparaît naturellement dans le premier exemple où il n'y a qu'un seul type d'unité. Lorsqu'il y en a plusieurs, il suffit de les considérer l'un après l'autre pour obtenir la règle ci-dessus.

Soit g' la valeur de la mesure de l'accélération de la pesanteur dans le système MKH avec pour unités $U'_1 = 1$ m, $U'_2 = 1$ h^{-2}
soit g la valeur de la mesure de l'accélération de la pesanteur dans le système CGS avec pour unités $U_1 = 1$ cm, $U_2 = 1$ s^{-2}

La relation fondamentale (8) s'écrit pour l'accélération de la pesanteur :

$$\begin{aligned} g' &= g \left[\frac{U_1}{U'_1}\right] \left[\frac{U_2}{U'_2}\right] = g \left[\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right] \cdot \left[\frac{1 \text{ s}^{-2}}{1 \text{ h}^{-2}}\right] = g \left[\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right] \cdot \left[\frac{1 \text{ h}}{1 \text{ s}}\right]^2 \\ &= \frac{1}{100} \cdot (3600)^2 \times g = 129\ 600 \times g \end{aligned} \tag{11}$$

les notations ayant la même signification que dans l'exemple précédent. D'où

$$g' = 129\,600 \times 981 = 127\,137\,600 \ = 1271 \times 10^5$$

À nouveau, nous pouvons remarquer que la relation (11) aurait pu être directement obtenue à partir de l'équation aux puissances (dimensions).

Étudions maintenant directement le dernier exemple.
Soit p' le poids d'un cm^3 d'eau dans le système MKH,
soit p le poids d'un cm^3 d'eau dans le système CGS.

L'équation aux puissances (dimensions) correspondant au poids est

$$[\text{poids}] = \text{M L T}^{-2}$$

D'où, en associant à chaque symbole le rapport des unités correspondant et avec les mêmes conventions

$$\frac{p'}{p} = \left[\frac{1 \text{ g}}{1 \text{ kg}}\right] \cdot \left[\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right] \cdot \left[\frac{1 \text{ h}^2}{1 \text{ s}^2}\right] = \frac{1 \text{ g}}{1000 \text{ g}} \cdot \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} \cdot \frac{3600^2 \text{ s}}{1^2 \text{ s}} = 129.6$$

d'où la valeur du poids en unités MKH

$$p' = 129.6 \times 981 = 127\,137.6$$

Présentation des systèmes d'unités.

Dans la suite de cette étude, nous passerons en revue quelques unes des unités des grandeurs physiques fondamentales et leurs liens entre certains systèmes d'unités où elles sont fréquemment utilisées. Nous ne chercherons nullement à être exhaustifs ou folkloriques, nous souhaitons simplement présenter les fondements de toutes ces relations afin que le lecteur puisse ensuite les appliquer aisément aux grandeurs physiques et aux systèmes d'unités qui l'intéressent.

Rappelons que notre propos n'est pas de décrire le système international (SI), ce qui est parfaitement réalisé sur le site du *Bureau International des Poids et Mesures* [1] déjà mentionné, ou dans la partie consacrée à la physique de la remarquable *Encyclopédie scientifique de l'Univers* [8] du Bureau des Longitudes, déjà citée, et dans de nombreuses autres publications. Nous voulons expliquer les liens existant dans quelques systèmes largement utilisés dans une littérature, disons, ancienne, pour en faciliter la lecture.

Comme nous l'avons déjà dit, nous nous restreignons dans un premier temps aux grandeurs mécaniques, ce qui ne diminue en rien la portée de notre étude puisque ces grandeurs se retrouvent dans les systèmes d'unités plus complets qui les englobent.

Nous n'expliciterons pas les définitions des unités, laissant ce soin aux ouvrages spécialisés [1]. Nous regarderons donc uniquement les liens entre les grandeurs physiques quand elles sont exprimées dans les systèmes suivants :

- le système CGS dont les unités de base sont le centimètre (cm), le gramme (g) et la seconde (s). C'est le système favori des physiciens[15].
- le système MKS dont les unités de base sont le mètre (m), le kilogramme (kg) et la seconde (s). C'est le système officiel recommandé[16] et tout un chacun est censé présenter ses résultats et ses données dans ce système..
- le système MTS, système officiel en France de 1919 à 1961, et dont les unités de base sont le mètre (m), la tonne (t) qui vaut 1000 kg et la seconde (s). Ce système, très proche du système MKS, est utilisé pour des masses relativement importantes au niveau de l'industrie.

[15] On lui reproche parfois son unité de longueur trop petite pour bien des usages courants, par exemple un kilomètre vaut 100 000 centimètres, mais l'utilisation des puissances de 10 allège cette écriture un peu lourde, par exemple la distance Terre Soleil qui est d'environ 150 millions de kilomètres s'écrit en unités CGS 15.10^{12} cm au lieu de 15.10^{7} si elle était exprimée en kilomètres : la différence s'estompe.

[16] Il n'est pas aussi souvent appliqué que l'on pourrait le croire, sauf dans les manuels scolaires. Dans la pratique, les gens utilisent, ce qui est tout à fait justifié, un système adapté à leurs besoins. C'est dans la transmission de leurs informations que leurs habitudes peuvent créer des problèmes si elles ne sont pas explicitées précisément.
L'exemple le plus criant de ce genre de comportement, mais qui n'est malheureusement pas le seul, est celui de la sonde Mars Climate Orbiter qui, en 1999, fut détruite à cause d'une erreur de navigation pendant sa mise en orbite autour de Mars. L'enquête a mis en évidence que certains paramètres avaient été calculés en unités de mesure anglo-saxonnes et transmises telles quelles à l'équipe de navigation, qui attendait ces données en unités du système métrique. Les ingénieurs de Lockheed Martin Astronautics (Denver dans le Colorado), la firme qui a conçu et fabriqué la sonde martienne, avaient apparemment gardé la mauvaise habitude de travailler avec les unités du système anglo-saxon. De leur côté, les ingénieurs du Jet Propulsion Laboratory (Pasadena en Californie) travaillaient depuis des années dans le système métrique, reconnu au niveau international comme étant le système de référence. Il semble que lors du transfert des données entre le centre de Lockheed et celui du JPL, personne ne se soit rendu compte qu'il fallait convertir les données, chacun étant persuadé qu'il utilisait les mêmes unités que l'autre ! Les données qui proviennent de Lockheed sont pourtant soumises à des procédures particulièrement sévères de vérification, mais celles ci sont restées parfaitement inopérantes. L'erreur était apparemment trop grossière pour être détectée, et elle est passée comme un poisson dans l'eau à travers les barrières du système de vérification.
Le bilan a une allure de catastrophe : 125 millions de dollars pour un seul cliché.

– le système MK_fS, anciennement MK_pS dont les unités de base sont le mètre (m), le kilogramme-force (kgf), (anciennement kilogramme-poids (kgp))[17] et la seconde (s). Le kilogramme-force est une unité de force qui correspond au poids à Paris d'une masse de 1 kg. Ce système, qui a fait souffrir des générations de lycéens, n'est plus utilisé. Nous n'en parlons que parce que sa connaissance s'avère utile pour comprendre les exemples numériques fournis dans les livres anciens.

Les préfixes (kilo, centi,…) et leur règles d'emploi [1] sont supposés connus et nous n'en parlerons que pour nous en servir[18].

Sur les unités de force.

• L'unité de force dans chaque système se définit à partir de la relation fondamentale de la dynamique

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma}$$

qui fournit l'équation aux puissances (dimensions) : $[\mathrm{F}] = [\mathrm{M}]\,[\mathrm{L}]\,[\mathrm{T}]^{-2}$

Dans les différents systèmes, les unités de force portent les noms suivants :

système	nom	symbole	définition
CGS	dyne	dyne	force communiquée à une masse de 1 g sous l'accélération de 1 cm/s^2
MKS	newton	N	force communiquée à une masse de 1 kg sous l'accélération de 1 m/s^2
MTS	sthène	sn	(du grec sthenos, force), force communiquée à une masse de 1 tonne sous l'accélération de 1 m/s^2
MK_fS	kilogramme-force	kgf	force communiquée à une masse de 1 kg sous l'accélération de 9,81 m/s^2

[17] Ces symboles kgp et kgf ont été officiellement adoptés en France en mai 1946 par la Commission Générale des Unités et Symboles de l'AFNOR. Par la suite, nous utiliserons l'un ou l'autre de ces symboles, par commodité et parce qu'ils se retrouvent indifféremment dans la littérature.

[18] À noter qu'il existe des unités de longueur ne dépendant pas du système international parmi lesquelles on trouve :

nom	symbole	valeur en unités MKS
mille marin		1 mille marin = 1852 m
ångström	Å	1 Å = 10^{-10} m
fermi	fm	1 fermi = 10^{-15} m
micron	μ	1 micron = 10^{-6} m

Tableau 1. Quelques unités de longueur n'appartenant pas au système international.

• Les relations entre ces différentes unités se déduisent de leurs définitions. Écrivons-les successivement :

– le sthène est la force qui, agissant sur une masse d'une tonne lui communique une accélération de 1 m/s^2 ; nous avons donc en utilisant la règle déduite de l'équation aux puissances (dimension) et de la relation (8) :

$$\mathrm{U_{MTS}(force)} = \left[\frac{\mathrm{U_{MTS}(masse)}}{\mathrm{U_{MKS}(masse)}}\right] \left[\frac{\mathrm{U_{MTS}(longueur)}}{\mathrm{U_{MKS}(longueur)}}\right] \left[\frac{\mathrm{U_{MTS}(temps)}}{\mathrm{U_{MKS}(temps)}}\right]^{-2} \mathrm{U_{MKS}(force)}$$

Comme la longueur et le temps sont les mêmes dans les deux systèmes, leurs rapports respectifs valent 1 et l'équation s'écrit

$$1 \text{ sthène} = \left[\frac{1 \text{ tonne}}{1 \text{ kg}}\right] \times 1 \text{ newton} = 1000 \text{ newtons}$$

– De même pour le passage des sthènes aux dynes, et pour les mêmes raisons :

$$\mathrm{U_{MTS}(force)} = \left[\frac{\mathrm{U_{MTS}(masse)}}{\mathrm{U_{CGS}(masse)}}\right] \left[\frac{\mathrm{U_{MTS}(longueur)}}{\mathrm{U_{CGS}(longueur)}}\right] \mathrm{U_{CGS}(force)}$$

$$1 \text{ sthène} = \left[\frac{1 \text{ tonne}}{1 \text{ g}}\right] \left[\frac{1 \text{ mètre}}{1 \text{ cm}}\right] \times 1 \text{ dyne} = 10^6\, 10^2 \text{ dynes} = 10^8 \text{dynes}$$

– La transfomation newton – dyne s'effectue de manière analogue :

$$\mathrm{U_{MKS}(force)} = \left[\frac{\mathrm{U_{MKS}(masse)}}{\mathrm{U_{CGS}(masse)}}\right] \left[\frac{\mathrm{U_{MKS}(longueur)}}{\mathrm{U_{CGS}(longueur)}}\right] \mathrm{U_{CGS}(force)}$$

$$1 \text{ newton} = \left[\frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ g}}\right] \left[\frac{1 \text{ mètre}}{1 \text{ cm}}\right] \times 1 \text{ dyne} = 10^3\, 10^2 \text{ dynes} = 10^5 \text{dynes}$$

– le kilogramme-force est la force qui agissant sur une masse de 1 kg lui communique une accélération de 9,81 m/s^2 ; or, l'unité de force dans le système MKS est la force qui, agissant sur un kg lui communique une accélération de 1 m/1 s^2 ; elle est donc 9,81 fois plus petite que la force précédente. Donc

$$1 \text{ newton} = \frac{1}{9,81} \text{ kgf} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ newtons}$$

Toutes ces relations, et leurs réciproques, peuvent se regrouper dans le tableau suivant :

Table de conversion des principales unités de force				
1 / vaut	dyne	N	sn	kgf
dyne	1	10^{-5}	10^{-8}	1/981 000
N	10^5	1	10^{-3}	1/9, 81
sn	10^8	1000	1	1000/9, 81
kgf	981 000	9, 81	$9,81\,10^{-3}$	1

Tableau 2.

- Indiquons quelques ordres de grandeur de forces :
  - un cheval au pas exerce sur son attelage un effort moyen de 70 kgf (687 newtons) ;
  - s'il donne un coup de collier, l'effort pourra aller jusque vers 450 à 500 kgf (4400 à 4900 newtons) ;
  - l'effort moyen d'une paire de boeufs au joug est de 300 kgf (2900 newtons) ;
  - celui d'une locomotive (1939) sur son attelage est de 6000 kgf (59000 newtons) ;
  - la charge supportée par un animal est de l'ordre de :

cheval	100 à 175 kgf
mulet	100 à 160 kgf
chameau	300 à 500 kgf
éléphant	1800 kgf

Ces exemples montrent que les unités n'ont pas été choisies au hasard, mais rapportées à des exemples de la vie courante. Le kilogramme-poids était initialement la force exercée par la pesanteur à Paris sur une masse d'un décimètre cube d'eau à son maximum de densité (aux alentours de 4 °C à la pression atmosphérique) ; c'était sensiblement le poids d'un litre d'eau, dont la masse, en système $\mathrm{MK}_p\mathrm{S}$, correspondant à 1/9,81 unités de masse $\mathrm{MK}_p\mathrm{S}$. Il faut toujours se rappeler dans quel système on évalue, et l'indiquer.

Notons que, dans le langage populaire, le mot poids est utilisé à la place du mot masse, ce qui entretient une certaine confusion : lorsqu'on vous dit : « Je vous pèse un 1 kilo de pommes de terre », cela se traduit en français académique par « Je vous mesure une masse de 1 kilogramme (en système MKS) de pommes de terre », sous-entendu pour un physicien : « ce kilogramme pèse 1 kgp (en système $\mathrm{MK}_p\mathrm{S}$) ».

Il ne vient à l'idée de personne, même pas d'un physicien, de demander pour 9,81 newtons de pommes de terre, ce qui est pourtant tout à fait légal, et celui qui ferait son marché avec une telle unité risquerait plutôt de quitter les lieux en camisole et entre deux infirmiers qu'avec son cabas plein.

Sur les unités d'énergie.

- L'unité d'énergie se définit dans chaque système à partir de la définition mécanique du travail

$$T = \overrightarrow{F}\ \overrightarrow{l}$$

qui fournit l'équation aux puissances (dimensions) : $[\mathrm{E}] = [\mathrm{M}]\,[\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2}$

L'unité d'énergie est, par définition, dans le système choisi, le travail fourni par l'unité de force dont le point d'application se déplace d'une unité de longueur dans la direction de la force.

Dans les systèmes d'unités que nous avons choisis, les unités d'énergie portent les noms

Noms et définitions des principales unités d'énergie

système	**nom**	**symbole**	**définition**
CGS	erg	erg	travail accompli par une force de 1 dyne dont le point d'application se déplace de 1 cm dans la direction de la force
MKS	joule	J	travail accompli par une force de 1 N dont le point d'application se déplace de 1 m dans la direction de la force
MTS	kilojoule	kJ	travail accompli par une force de 1 st dont le point d'application se déplace de 1 m dans la direction de la force
MK$_f$S	kilogramme-mètre	kgm	travail accompli par une force de 1 kgf dont le point d'application se déplace de 1 m dans la direction de la force

Tableau 3.

Quelques remarques :

L'erg est une unité de travail très petite ; elle équivaut au travail d'une mouche qui s'élève de un centimètre le long d'un mur. C'est pourquoi, dans le domaine industriel, on lui préfère un multiple, le joule, qui vaut 10 millions d'ergs (et qui est l'unité de base du travail dans le système MKS).

Il en sera de même pour l'unité de puissance l'erg/seconde à laquelle sera préférée le watt qui est aussi 10 millions de fois plus grande.

À ces unités, s'en ajoutent d'autres, et qui montrent qu'à chaque étape, la physique intervient :

- la calorie (internationale), qui est la quantité de chaleur nécessaire pour élever 1 g d'eau de 14,5 °C à 15,5 °C. Elle vaut 4,1868 joules et elle a pour multiple la kilocalorie ou grande calorie qui vaut mille calories ;
- l'électron volt est l'énergie acquise par une particule de charge élémentaire ($e = 1,6\ 10^{-19}$ coulombs) sous une différence de potentiel d'un volt. La correspondance avec le joule est donnée par :

$$1\,\mathrm{eV} \text{ équivaut à } 1,6\,10^{-19}\,\text{joules ce qui équivaut à } 1.6\,10^{-12}\,\text{ergs}$$

- le kilowatt heure, qui a l'avantage de mettre en évidence la puissance disponible. Le watt équivalent à un joule par seconde, cette unité correspond à 1000 joules par seconde × 3600 secondes = 36 10^5 joules = 3,6 MJ dans le système SI (anciennement MKSA), soit 3.6 10^{13} ergs dans le système CGS.

Tous ces résultats sont regroupés dans le tableau ci-après :

Table de conversion des principales unités d'énergie							
1 vaut	erg	joule	kW·h	calorie	eV	g (c^2)	kg·m
erg	1	10^{-7}	$2.78\,10^{-14}$	$2.39\,10^{-8}$	$6.25\,10^{11}$	$1.111\,10^{-21}$	$1.019\,10^{-8}$
joule	10^7	1	$2.78\,10^{-7}$	$2.39\,10^{-1}$	$6.25\,10^{18}$	$1.111\,10^{-14}$	$1.019\,10^{-1}$
kW·h	$3.6\,10^{13}$	$3.6\,10^6$	1	$8.63\,10^5$	$2.26\,10^{25}$	$4.\,10^{-8}$	$3.67\,10^5$
calorie	$4.18\,10^7$	4.18	$1.16\,10^{-6}$	1	$2.62\,10^{19}$	$4.644\,10^{-14}$	$4.268\,10^{-1}$
eV	$1.6\,10^{-12}$	$1.6\,10^{-19}$	$4.45\,10^{-26}$	$3.82\,10^{-20}$	1	$1.769\,10^{-33}$	$1.631\,10^{-20}$
g (c^2)	$9\,10^{20}$	$9\,10^{13}$	$2.5\,10^7$	$2.153\,10^{13}$	$5.652\,10^{32}$	1	$9.17\,10^{12}$
kg·m	$9.81\,10^7$	9.81	$2.72\,10^{-6}$	2.346	$6.16\,10^{19}$	$1.091\,10^{-13}$	1

Tableau 4. Table de conversion entre les principales unités d'énergie.
La colonne et la ligne g (c^2) donnent les équivalents énergie-masse de la Relativité restreinte.

L'introduction des systèmes électriques

Nous avons vu que le système MK_pS s'est développé à la fin du XVIII^e au moment où les physiciens commençaient à découvrir les lois de l'électricité et du magnétisme. Il était alors logique que les grandeurs physiques correspondantes apparaissent dans les divers systèmes d'unités.

Peut-être pour des raisons pratiques, plus vraisemblablement pour des raisons d'universalité[19], c'est le système CGS qui a prévalu chez les physiciens et c'est dans ce système que ces derniers, par des moyens divers, ont introduit, comme nous le verrons, les unités des grandeurs physiques associées aux phénomènes électromagnétiques.

Ces moyens divers ont donné naissance à autant de représentations du même système CGS de base. C'est bien le même puisque toutes les grandeurs se mesurent à l'aide des trois grandeurs fondamentales que sont la longueur, la masse et le temps.

Les deux principaux systèmes d'unités sont le système d'unités électrostatiques CGS et le système d'unités électromagnétique CGS, le second ayant été nettement plus utilisé parce qu'il avait la faveur des électriciens. Les autres systèmes ne sont, disons, que des combinaisons de ces deux-là.

[19] La masse d'un corps est la même partout sur Terre, alors que son poids varie selon le lieu. Gauss, dont les travaux sur le magnétisme ont été essentiels, était, au départ, un partisan du système métrique. Il s'est cependant ravisé pour ces raisons mêmes d'universalité et a été l'un des fondateurs du système CGS.

Il ne faudrait pas en sous-estimer l'importance car ils ont accompagné, depuis la fin du XVIII^e et tout au long du XIX^e, les découvertes successives de l'électromagnétisme, par tous ceux, de Coulomb jusqu'à Maxwell et Hertz, dont les noms sont devenus depuis synonymes d'unités. Ils ont accompagné également les réflexions sur les lois correspondant à ces découvertes, et en particulier à celles ouvrant le domaine des ondes électromagnétiques.

Enfin, c'est une réflexion sur les inconvénients et les avantages de ces deux systèmes qui a été à la base du système MKSA rationalisé qui tend, un siècle après sa création, à se généraliser de façon universelle. Les rêves des précurseurs des XVII^e siècle et XVIII^e finissent par se réaliser, même si ce n'est pas sous la forme initialement prévue.

Le système d'unités électrostatiques C.G.S. (ues cgs) [7].

Le système d'unités électrostatique C.G.S., souvent noté (ues cgs), est fondé sur la loi de Coulomb

$$f = \frac{1}{k}\frac{qq'}{d^2}$$

définissant le module de la force exercée sur des charges q et q' situées à une distance d l'une de l'autre.

k est une constante choisie comme étant égale à 1 dans le vide, ce qui fixe le type des unité de charge électrique :

- l'unité électrostatique de quantité d'électricité est celle qui correspond dans le vide ($k = 1$) à deux charges, égales en valeur absolue et qui, placées à 1 cm l'une de l'autre, produit sur chacune une force égale à une dyne ; elle porte un nom, le *franklin*.
  le type d'unité (la dimension) de cette quantité d'électricité est défini dans le vide en égalant les charges dans la formule précédente ($q = q'$)

  $$q = d\sqrt{f}$$

  dont dérive l'équation aux puissances (équation aux dimensions)

  $$[q_s] = \mathrm{L}^{3/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-1}$$

  où l'indice '$_s$' sous-entend « statique » (système électrostatique)[20].
- À partir de cette grandeur, de la loi d'Ohm $E = RI$, l'énergie se calcule par $W = RI^2t$; il suffit de choisir R ou I pour exprimer les types d'unité des grandeurs électrodynamiques dans le système CGS. Partons de I.

[20] Pour des raisons de clarté, nous conservons les lettres caractérisant les types d'unité, L, M, T. Mais puisque nous sommes dans le système CGS, la seule valeur que peut prendre L est le centimètre, M, le gramme et T, la seconde ; mais nous utiliserons constamment cette convention qui apporte plus d'information.

– l'unité électrostatique d'intensité de courant électrique se définit alors à partir de la formule $q = It$; elle correspond à un courant qui transporte une unité électrostatique de quantité d'électricité en une seconde ; elle ne porte pas de nom spécifique. L'équation aux puissances (dimensions) correspondant s'écrit :

$$[I_s] = \frac{[q_s]}{[t]} = [q_s]\,\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{L}^{3/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-2}$$

– l'unité électrostatique de différence de potentiel (ddp) se définit à partir de la formule $W = q\,V$; elle correspond au travail de déplacement d'un erg d'une unité électrostatique de quantité d'électricité ; elle ne porte pas non plus de nom spécial. L'équation aux puissances définissant l'unité de ddp s'écrit alors :

$$[V_s] = \frac{[W]}{[q_s]} = \frac{\mathrm{L}^2\ \mathrm{M}\ \mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}^{3/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{L}^{1/2}\,\mathrm{M}^{1/2}\,\mathrm{T}^{-1}$$

– l'unité électrostatique de résistance est alors déduite de la loi d'Ohm. Son équation aux puissances s'écrit

$$[R_s] = \frac{[V_s]}{[I_s]} = \frac{\mathrm{L}^1/2\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}} = \mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{T}$$

– l'unité électrostatique de capacité se définit ensuite à partir de la formule $Q = C\,V$; c'est la capacité d'un corps pouvant absorber une unité électrostatique d'électricité sous une unité électrostatique de différence de potentiel ; son unité se déduit de l'équation aux puissances

$$[C_s] = \frac{[q_s]}{[V_s]} = \frac{\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{L}$$

et c'est ce qui explique pourquoi, dans ce système, l'unité de capacité est appelée parfois centimètre[21].

– Nous sommes maintenant en mesure de décrire les unités magnétiques dans le système ues cgs. L'unité d'induction magnétique $[B]$ se déduit de la loi de Laplace $F = I\,\ell\,B$

$$[B] = \frac{[F]}{[I]\ [\ell]} = \frac{\mathrm{L\ M\ T}^{-2}}{(\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2})\ \mathrm{L}} = \mathrm{L}^{-3/2}\,\mathrm{M}^{1/2}$$

---

[21] Cela peut se justifier en pratique puisque le calcul de la capacité d'un condensateur plan fait intervenir la formule

$$C = \frac{k}{4\pi}\frac{S}{e}$$

où S est la surface de chaque plaque conductrice et e la distance qui les sépare. La grandeur physique C correspond bien à une longueur. Sa valeur peut donc être mesurée en cm dans le système C.G.S.

– Par le théorème d'Ampère $H\ \ell = N\ I$ (où N est un nombre pur), nous déduisons l'unité de champ magnétique

$$[H] = \frac{[I]}{[\ell]} = \frac{\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}} = \mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}$$

– Connaissant les types d'unité de l'induction magnétique et du champ magnétique, nous obtenons ceux de la susceptibilité magnétique par $B = \mu\ H$, ce qui donne

$$[\mu] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{\mathrm{L}^{-3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}} = \mathrm{L}^{-2}\ \mathrm{T}^{2}$$

qui correspond à l'inverse du type d'unités du carré d'une vitesse.

– La loi de Coulomb des masses magnétiques

$$F = \frac{1}{\mu}\frac{m_m^2}{d^2}$$

nous permet d'écrire que

$$m_m^2 = [\mu]\ [F]\ [d^2] = (\mathrm{L}^{-2}\ \mathrm{T}^2)\ \mathrm{L}\ \mathrm{M}\ \mathrm{T}^{-2}\ \mathrm{L}^2 = \mathrm{L}\ \mathrm{M}$$

d'où

$$[m_m] = L^{1/2}\ M^{1/2} \quad .$$

– De la relation définissant le potentiel magnétique

$$V^\star = \frac{1}{\mu}\ \Sigma\frac{m_m}{r}$$

nous obtenons

$$[V^\star] = [\mu]^{-1}\ [m_m]\ [r]^{-1} = (\mathrm{L}^{-2}\ \mathrm{T}^2)\ (\mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2})\ \mathrm{L}^{-1} = \mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}$$

Comme vérification partielle, il est aisé de retrouver le type d'unités du champ magnétique par $dV^\star = -H\ d\ell$ qui donne

$$[H] = [V^\star]\ \mathrm{L}^{-1} = \mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}$$

qui correspond bien à la valeur déjà trouvée.

Système d'unités électrostatiques CGS			
grandeur physique	symbole	formule de définition	type d'unités (dimensions)
charge électrique	q	$q^2 = Fr^2$	$\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}$
intensité du courant	I	$q = It$	$\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-2}$
différence de potentiel	V	$W = qV$	$\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-1}$
résistance	R	$V = RI$	$\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}$
capacité	C	$q = CV$	L
induction magnétique	B	$F = I\ell B$	$\mathrm{L}^{-3/2}\mathrm{M}^{1/2}$
champ magnétique	H	$H\ell = NI$	$\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-2}$
susceptibilité magnétique	μ	$B = \mu H$	$\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{2}$
masse magnétique	m_m	$m_m^2 = \mu Fr^2$	$\mathrm{L}^{1/2}\mathrm{M}^{1/2}$
potentiel magnétique	$V^\star$	$\mu r V^\star = m_m$	$\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{T}^{-2}$

Tableau 5. Les principales unités du système électrostatique CGS.

Le système d'unités électromagnétiques C.G.S. (uem cgs) [7].

Les unités magnétiques dans le système uem cgs

De manière analogue au système d'unités électrostatique, le système d'unités électromagnétiques C.G.S. est basé sur les lois de Coulomb qui définissent la notion de « masse magnétique » par

$$f = \frac{1}{\mu} \frac{mm'}{r^2}$$

μ est une constante. Le système d'unités électromagnétiques CGS s'obtient en posant $\mu = 1$ dans le vide, ce qui permet de définir toutes les unités magnétiques :.

- m et m' sont les symboles des masses magnétiques et l'unité électromagnétique de masse est celle qui exerce sur une masse identique placée à 1 cm une force répulsive égale à une dyne. L'équation donnant l'unité de cette grandeur s'obtient à partir de l'équation ci-dessus en imposant $m = m'$ ce qui donne

  $$m = r\sqrt{f}$$

  et fournit l'équation aux puissances établissant le type d'unité (dimension) de la masse magnétique :

  $$[m_m] = \mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}$$

  où l'indice 'm' sous-entend « magnétique » (système électromagnétique) et où nous pouvons faire les mêmes remarques sur L, M, T que pour le système électrostatique. Du fait des formules les définissant, les types d'unités (dimensions) sont les mêmes pour la masse magnétique et pour la charge électrique.
  La masse magnétique étant définie, tous les autres types d'unités magnétiques s'en déduisent.

- la densité superficielle magnétique σ est définie par l'équation

  $$\sigma = \frac{m}{S}$$

  où S est la surface. Elle conduit à l'équation aux puissances donnant son type d'unité (dimension)

  $$[\sigma_m] = \mathrm{L}^{-1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}$$

  L'unité électromagnétique de σ est la densité superficielle qui correspond à une surface de 1 cm^2 recouverte d'une unité de masse magnétique.

- le moment magnétique A, qui est défini par $A = m\,r$ a donc pour équation aux puissances (dimensions)

  $$[A] = \mathrm{L}^{5/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}$$

L'unité de moment magnétique est le moment magnétique d'un dipôle constitué de deux masses magnétiques égales mais de signes contraires, et placées à un centimètre l'une de l'autre.

– l'intensité d'aimantation, qui est le moment magnétique par unité de volume $\mathcal{I} = A/\tau$, aura alors pour type d'unités

$$[\mathcal{I}] = \mathrm{L}^{-1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}$$

L'unité d'intensité d'aimantation correspond à un aimant qui possède par centimètre cube un moment magnétique égal à l'unité.

– le potentiel magnétique

$$V^\star = \Sigma\ \frac{m}{r}$$

aura pour équation aux puissances (dimensions)

$$[V^\star] = \mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}$$

Son unité correspond au potentiel qui existe en un point distant de un centimètre d'une masse magnétique unité isolée dans l'espace.

– l'intensité du champ magnétique, définie par

$$H = -\frac{dV^\star}{dr}$$

aura son type d'unité défini par l'équation aux puissances

$$[H] = \mathrm{L}^{-1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1} \quad .$$

Une fois n'est pas coutume, cette unité porte un nom, l'oersted, qui correspond à un champ magnétique où le potentiel magnétique varie d'une unité par centimètre.

– La susceptibilité magnétique χ et la perméabilité μ qui sont définies par

$$\chi = \frac{\mathcal{I}}{H} \quad \text{et} \quad \mu = 1 + 4\pi\chi$$

sont des nombres réels, donc de type d'unité (dimension) 1.

– l'induction magnétique

$$B = \mu\, H$$

a donc pour équation aux puissances (dimensions)

$$[B] = \mathrm{L}^{-1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1} \quad .$$

L'unité d'induction magnétique est le *gauss* ; c'est le champ qui exerce sur une unité de masse magnétique une force de une dyne.

– le flux magnétique dont l'équation de définition

$$\Phi = \mu\, H\, S$$

conduit à l'équation aux puissances

$$[\Phi] = \mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1} \quad .$$

Son unité a pour nom le maxwell ; il correspond au flux traversant normalement une surface de un centimètre carré placé dans un endroit d'un champ où l'induction est de un gauss.

Les unités électrodynamiques dans le système uem cgs

Le lien entre les phénomènes mécaniques (forces) et les phénomènes électromagnétiques s'obtient indifféremment à partir de la loi de Laplace qui exprime l'action d'un élément de courant sur une masse magnétique ou de la loi de Biot et Savart qui exprime le champ magnétique créé par un courant. Partons de cette dernière qui s'exprime sous la forme

$$H = k\, \frac{2I}{a}$$

où H est le champ magnétique créé en un point de l'espace distant de a d'un fil rectiligne parcouru par un courant I. k vaut 1 dans le vide.

– l'intensité I d'un courant se définira alors par

$$I = \frac{H\, a}{2}$$

ce qui lui donnera comme type d'unité (dimension)

$$[I] = \mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1} \quad .$$

L'unité d'intensité de courant correspond donc à un courant qui, circulant dans un conducteur rectiligne très long développe à deux centimètres de ce conducteur un champ magnétique d'intensité égale à un oersted[22].

– à partir de l'intensité, nous pouvons déduire la quantité d'électricité par $q = I\, t$ qui aura alors comme type d'unité (dimension)

$$[q_m] = \mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2} \quad .$$

[22] Nous aurions aussi pu partir, pour cette définition, de la notion de potentiel magnétique $V^\star = I\, \omega$. Dans ce cas, l'unité d'intensité de courant correspond à un courant qui, circulant dans un circuit, développe en un point d'où le circuit est vu sous un angle solide de ω unité (un stéradian) un potentiel magnétique égal à l'unité.

Son unité est la quantité d'électricité qui s'écoule pendant une seconde à travers la section droite d'un conducteur traversé par un courant d'intensité unité.

- la résistance R d'un conducteur se définit à partir de $W = R I^2 t$ où W est l'énergie dissipée par effet Joule dans ce conducteur pendant le temps t par un courant d'intensité I. Son type d'unité est alors

$$[R] = \frac{[W]}{[I^2 t]} = \mathrm{L}\ \mathrm{T}^{-1} \quad .$$

Il est donc du même type d'unité qu'une vitesse dans ce système, et l'unité de résistance dans le système uem cgs est la résistance d'un conducteur qui, traversé par un courant d'intensité unité, y dissipe pendant une seconde une énergie de 1 erg.

- La différence de potentiel (ddp) ou la force électromotrice (fem) se définissent à partir de la loi d'Ohm $V = R I$ ce qui donne leur type d'unité

$$[V] = \mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2} \quad .$$

L'uem cgs de potentiel est la ddp qui, appliquée aux extrémités d'un conducteur de résistance unité, y fait passer un courant unité. De même, l'uem cgs de fem est celle d'un générateur qui développe à ses bornes une ddp unité[23].

- Les unités correspondant à la charge se déduisent de la relation $q = C V$ par

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{\mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}}{\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}} = \mathrm{L}^{-1}\ \mathrm{T}^{2} \quad .$$

- Les coefficients de self-induction $\mathcal{L}$ et d'induction mutuelle $\mathcal{M}$ se déduisent des formules

$$\mathcal{L} = \frac{\text{flux dû au champ propre traversant } S}{I}$$
$$\mathcal{M} = \frac{\text{flux dû aux autres champs traversant } S}{I} \quad .$$

Leurs types d'unité sont les mêmes et donnés par l'équation aux puissances

$$[\mathcal{L}] = [\mathcal{M}] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1}} = \mathrm{L} \quad .$$

[23] Cohérence : il est bon de vérifier que des formules indépendantes aboutissent au même résultat. Nous connaissons le type d'unité de la charge et celui de la ddp. Ces grandeurs physiques sont reliées à l'énergie par $W = q\,(V_1 - V_2)$ qui donne l'énergie développée par la quantité d'électricité q passant du potentiel V_1 au potentiel V_2. Il est donc possible de retrouver de façon indépendante le type d'unité de l'énergie par cette dernière formule. En l'appliquant, nous avons :

$$[W] = [q]\,[V_1 - V_2] = (\mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2})(\mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-2}) = \mathrm{L}^{2}\ \mathrm{M}\ \mathrm{T}^{-2}$$

ce qui est bien le type d'unité attendu, celui de l'énergie.

L'uem cgs de self-induction $[\mathcal{L}]$ est donc le centimètre ; c'est le coefficient de self induction qui correspond à un circuit qui, traversé par un courant d'intensité unité, reçoit un flux unité dû à son propre courant. La définition de l'unité d'induction mutuelle $[\mathcal{M}]$ est analogue.

– Enfin, l'uem cgs de la perméabilité électrique du vide se déduit de la loi de coulomb

$$F = \frac{1}{\epsilon} \frac{qq'}{d^2}$$

dont nous déduisons :

$$[\epsilon] = \frac{[q]^2}{[F]\ [d]^2} = \frac{\mathrm{L\ M}}{(\mathrm{L\ M\ T^{-2}})\ \mathrm{L}^2} = \mathrm{L}^{-2}\ \mathrm{T}^2$$

Système d'unités électromagnétiques CGS			
grandeur physique	symbole	formule de définition	type d'unités (dimensions)
masse magnétique	m_m	$m_m^2 = Fr^2$	$\mathrm{L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}}$
potentiel magnétique	$V^\star$	$rV^\star = m_m$	$\mathrm{L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}}$
champ magnétique	H	$dV^\star = -Hd\ell$	$\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}}$
induction magnétique	B	$B = H$	$\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}}$
intensité du courant	I	$F = I\ell B$	$\mathrm{L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}}$
charge électrique	q	$q = It$	$\mathrm{L^{1/2}M^{1/2}}$
résistance	R	$W = RI^2t$	$\mathrm{LT^{-1}}$
différence de potentiel	V	$V = RI$	$\mathrm{L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}}$
capacité	C	$q = CV$	$\mathrm{L^{-1}T^2}$
perméabilité du vide	ϵ	$\epsilon F d^2 = q^2$	$\mathrm{L^{-2}T^2}$

Tableau 6. Les principales unités du système électromagnétique CGS.

Liens entre les systèmes d'unités électrostatiques et électromagnétiques cgs.

La grandeur $\dfrac{q_s}{q_m} = c$

Les systèmes d'unités électriques ne différant que par les grandeurs électromagnétiques, le passage de l'un à l'autre portera uniquement sur ces grandeurs. Ce qui est remarquable, c'est que cette correspondance va pouvoir s'établir uniquement à partir de l'expression de l'unité de la quantité d'électricité dans un des systèmes en fonction de la quantité d'électricité dans l'autre.

Explicitons cela en fonction des types d'unité (dimensions). Nous avons vu que le type d'unité de charge électrique s'écrit dans chaque système

$$[q_s] = \mathrm{L}^{3/2}\ \mathrm{M}^{1/2}\ \mathrm{T}^{-1} \quad \text{et} \quad [q_m] = \mathrm{L}^{1/2}\ \mathrm{M}^{1/2}$$

et donc que leur rapport

$$\frac{[q_s]}{[q_m]} = \mathrm{L}\ \mathrm{T}^{-1}$$

s'exprime avec le même type d'unité qu'une vitesse.

En réalité, il se trouve que cette propriété n'est pas seulement vraie pour le rapport des types d'unité (dimensions), mais que le nombre d'unités de quantité d'électricité électrostatique contenu dans une unité électromagnétique, q_s/q_m est une véritable grandeur physique[24]. Nous la nommerons c.

Pour justifier le fait que c est une véritable grandeur physique, c'est-à-dire une vitesse associée à un phénomène physique, Maxwell propose une « expérience de pensée » du type des fameuses *Gedankenexperiment* qu'Einstein affectionnera un peu plus tard. Suivons-le dans son raisonnement et considérons deux fils parallèles distants de b et parcourus par des courants I et I'. La force à laquelle est soumis un élément de longueur a de l'un des fils a pour module :

$$F = 2\, I\, I'\, \frac{a}{b}$$

qui, dans le cas $b = 2a$ s'écrit

$$F = I\, I'$$

Or la quantité d'électricité accompagnant le courant I pendant le temps t est It en système électromagnétique et cIt en système électrostatique, puisque c est le nombre d'unité électrostatiques contenues dans une unité électromagnétique.

Si nous supposons maintenant que nous chargeons deux petits conducteurs avec les quantités d'électricité que transportent les deux courants pendant le temps t et que nous placions ces conducteurs à une distance r l'un de l'autre. La force de répulsion qui agit sur chaque conducteur sera en module :

$$F = \frac{I\, I'\, c^2\, t^2}{r^2}$$

Choisissons maintenant r de façon que cette répulsion soit égale à la force d'attraction entre les deux courants ; nous obtenons :

$$\frac{I\, I'\, c^2\, t^2}{r^2} = I\, I' \quad \text{soit} \quad r = c\, t \quad .$$

[24] C'est tout à fait étonnant, et c'est un apport spectaculaire de la théorie des systèmes d'unité électromagnétiques. Sauf erreur de ma part, c'est la première fois qu'une grandeur physique apparaît comme étant le rapport de la même grandeur évaluée dans deux systèmes d'unités différents. Y a-t-il depuis un autre exemple ? C'est aussi la première fois que la vitesse de la lumière apparaît intrinsèquement dans une théorie. Maxwell utilisera magnifiquement cette propriété pour unifier les ondes électromagnétiques et créer leur théorie. Puis ce sera Einstein qui fera de cette vitesse une constante universelle par sa théorie de la Relativité restreinte.

La distance r doit donc croître c fois plus vite que le temps. c est donc une vitesse, celle avec laquelle les deux conducteurs s'éloignent l'un de l'autre, vitesse dont la valeur absolue est la même quel que soit le système d'unités choisi[25].

La mesure de cette vitesse devient alors importante et entre dans le domaine des étalons de mesure, ce qui la fait sortir du cadre de cette étude[26] où nous supposerons désormais qu'elle est une grandeur physique à part entière.

Conversion entre les unités électromagnétiques CGS et les unités électrostatiques CGS.

Rappelons tout d'abord que lorsque l'on parle de ces deux systèmes, les unités de base sont parfaitement définies : ce sont le centimètre, le gramme et la seconde pour chacun d'eux. Ils ont donc les mêmes unités mécaniques et ne différent que par le choix des constantes dans l'une ou l'autre des formules de base définissant

- la masse magnétique dans le système uem cgs où l'on donne la valeur 1 à la perméabilité du vide ($\mu_0 = 1$),
- la charge électrique dans le système ues cgs où l'on donne la valeur 1 à la constante diélectrique du vide ($\epsilon_0 = 1$).

Pour éviter toute équivoque dans les formules de passage, nous allons adapter aux systèmes électromagnétiques les formules

(1) $G = \underline{g}[G]$ définissant une grandeur physique ;
(2) définissant la valeur $\mathrm{mes}(G) = g\,U$ de cette grandeur en unité U ;
(4) $g' = \left[\dfrac{U}{U'}\right] g$ qui lie cette valeur à celle obtenue dans l'unité U'.

ce qui se traduira, par exemple, pour la charge électrique par

- $q = \underline{q}\,[q]$ pour la grandeur et le type d'unité ;
- $\mathrm{mes}(q) = q_m$ uem(charge) $= q_s$ ues(charge) pour sa valeur dans l'unité choisie.

Si nous appliquons ces conventions au lien défini dans le paragraphe précédent entre la mesure électrostatique et la mesure électromagnétique d'une charge électrique, nous pouvons écrire

$$q_s = c\,q_m$$

[25] L'expérience proposée est bien sûr irréalisable en pratique. Indépendamment de la vitesse à laquelle les conducteurs s'éloigneraient l'un de l'autre, on ne voit pas très bien comment on pourrait les charger continûment.

[26] Il n'y a pas lieu en effet ici de proposer une explication théorique plus détaillée de ce fait qui relève de la physique théorique et que le lecteur trouvera, par exemple, dans les livres de Maxwell [4] ou de parler plus explicitement des expériences qui tendent à prouver le même fait et qui sont décrites par le même Maxwell ou par Bruhat [9].

Cela dit, à l'époque de Maxwell, la mesure de cette vitesse en tant que nombre d'unités électrostatiques de quantité d'électricité contenues dans une unité électromagnétique a été l'un des grands problèmes expérimentaux du moment. Diverses méthodes ont été proposées et réalisées par les physiciens, dont l'une par Maxwell lui-même. Comme nous le savons, elles ont toutes donné pour c une valeur proche de 300 000 km/s.

où c est une constante mesurable, qui se révélera être la vitesse de la lumière et dont nous adopterons pour valeur $3\,10^{10}$ cm/s. Dans ces conditions,

$$\text{mes}(q) = q_m\,\text{uem(charge)} = q_s\,\text{ues(charge)} = c\,q_m\,\text{ues(charge)}$$

fournit le lien entre les unités de charge des deux systèmes :

$$\text{uem(charge)} = c\,\text{ues(charge)} = 3.10^{10}\,\text{ues(charge)}$$

Regardons ensuite les unités d'intensité dont les équations de définition sont exactement de la même forme dans les deux systèmes[27], soit $q = I\,t$; elles permettent d'écrire dans chacun d'eux

$$\text{mes}(q) = \text{mes}(I)\,\text{mes}(t)$$

et fournissent donc les deux équations

$$\begin{aligned} q_m\text{uem(charge)} &= I_m t\,\text{uem(intensité)}\,\text{uem(temps)} \\ q_s\text{ues(charge)} &= I_s t\,\text{ues(intensité)}\,\text{ues(temps)} \end{aligned}$$

puisque l'unité de temps est la même dans les deux systèmes.
Comme, de plus, les valeurs mesurées satisfont à l'équation de définition :

$$q_m = I_m t \quad \text{et} \quad q_s = I_s t$$

le rapport des deux équations conduit à

$$\frac{\text{uem(charge)}}{\text{ues(charge)}} = c = \frac{\text{uem(intensité)}}{\text{ues(intensité)}}$$

et donc

$$\text{uem(intensité)} = c\,\text{ues(intensité)} = 3\,10^{10}\text{ues(intensité)}$$

comme nous pouvions nous y attendre puisque la charge et l'intensité sont des grandeurs proportionnelles. Enfin l'identification avec (4)

$$\text{uem(intensité)} = \left[\frac{\text{uem(intensité)}}{\text{ues(intensité)}}\right]\text{ues(intensité)}$$

conduit à

$$\left[\frac{\text{uem(intensité)}}{\text{ues(intensité)}}\right] = c$$

L'unité de différence de potentiel ou de tension peut se définir dans chacun des deux systèmes par la même équation $W = qV$. C'est ce que nous avons vu dans la définition

[27] Il est important de vérifier cette condition car des constantes "d'ajustement" peuvent intervenir comme c'est le cas dans les lois de Coulomb ou les définitions de certains champs, et dont il faut alors tenir compte.

du système ues cgs. Pour le système uem cgs, cette équation résulte de la combinaison de la loi d'Ohm, $V = RI$ et de la définition de l'énergie calorifique $W = RI^2t$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire de manière analogue à ce qui a été fait pour l'unité d'intensité

$$W_m \,\mathrm{uem(travail)} = V_m q_m \,\mathrm{uem(tension)}\,\mathrm{uem(charge)}$$
$$W_s \,\mathrm{ues(travail)} = V_s q_s \,\mathrm{ues(tension)}\,\mathrm{ues(charge)}$$

Comme l'unité de travail est la même dans les deux systèmes, que $W_m = V_m q_m$ et que $W_s = V_s q_s$, le rapport des deux équations ci-dessus s'écrit :

$$\mathrm{uem(tension)}\,\mathrm{uem(charge)} = \mathrm{ues(tension)}\,\mathrm{ues(charge)}$$

équation qui, puisque uem(charge) $= c$ues(charge), se simplifie en

$$\mathrm{uem(tension)} = \frac{1}{c}\,\mathrm{ues(charge)}$$

ce qui, en utilisant (4) fournit

$$\left[\frac{\mathrm{uem(tension)}}{\mathrm{ues(tension)}}\right] = \frac{1}{c}$$

Connaissant les unités de différence de potentiel (ou de tension), il est aisé, à partir de la loi d'Ohm $V = Ri$, d'en déduire celles de résistance. Les justifications successives sont les mêmes que précédemment et les différentes étapes s'écrivent :

$$V_m \mathrm{uem(tension)} = R_m I_m \mathrm{uem(résistance)}\,\mathrm{uem(intensité)}$$
$$V_s \mathrm{ues(tension)} = R_s I_s \mathrm{ues(résistance)}\,\mathrm{ues(intensité)}$$

qui se réduisent à

$$\mathrm{uem(tension)} = \mathrm{uem(résistance)}\,\mathrm{uem(intensité)}$$
$$\mathrm{ues(tension)} = \mathrm{ues(résistance)}\,\mathrm{ues(intensité)}$$

et fournissent les rapports

$$\frac{1}{c} = \frac{\mathrm{uem(résistance)}}{\mathrm{ues(résistance)}} \cdot c$$

donc

$$\mathrm{uem(résistance)} = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{ues(résistance)}$$

et puis, toujours d'après (4)

$$\left[\frac{\mathrm{uem(résistance)}}{\mathrm{ues(résistance)}}\right] = \frac{1}{c^2}$$

Enfin le lien entre les unités de capacité s'établit de la même façon à partir de la définition, commune aux deux systèmes $q = CV$

$$q_m \text{uem(charge)} = C_m V_m \text{uem(capacité)}\,\text{uem(tension)}$$
$$q_s \text{ues(charge)} = C_s V_s \text{ues(capacité)}\,\text{ues(tension)}$$

d'où

$$\frac{\text{uem(charge)}}{\text{ues(charge)}} = \frac{\text{uem(capacité)}}{\text{ues(capacité)}}\,\frac{\text{uem(tension)}}{\text{ues(tension)}}$$

et enfin

$$\text{uem(capacité)} = c^2\,\text{ues(capacité)}$$

avec (4)

$$\left[\frac{\text{uem(capacité)}}{\text{ues(capacité)}}\right] = c^2$$

Il suffit ensuite de procéder de même pour les unités restantes. Les principaux résultats sont regroupés dans le tableau 7.

Le Système Pratique (SP).

Les physiciens n'ont pas donné de noms à la plupart des unités des systèmes d'unités électrostatiques et électromagnétiques[28] bien qu'ils aient utilisé essentiellement ce dernier, intéressant pour ceux qui utilisent les applications de l'électricité qui se rattachent presque toutes à l'électromagnétisme.

La raison de ce fait provient de ce que l'utilisation directe du système uem cgs associe des valeurs dont les ordres de grandeur sont entre elle dans des rapports comprenant des puissances de 10 peu pratiques à manipuler. Pour éviter de traîner ces coefficients, les physiciens ont choisi de privilégier certains multiples des unités de base.

En pratique, l'unité électromagnétique de résistance est très petite, on lui a donc adjoint un multiple, l'*ohm*, qui, avec une autre unité arbitraire, le *volt*, a formé la base d'un autre système, le système électromagnétique pratique, dit S.P.

- L'ohm vaut 10^9 unités électromagnétiques CGS de résistance[29].
- Le volt vaut 10^8 unités électromagnétiques CGS de ddp[30].

---

[28] Les unités du système électrostatique n'ont pas de nom. Dans le système électromagnétique, seuls le champ magnétique (oersted), la force magnétomotrice (gilbert), l'induction magnétique (gauss) et le flux d'induction magnétique (maxwell) ont reçu un nom.

[29] C'est, à 1/15 près, la valeur de l'ancienne unité de résistance, le *siemens*, qui était la résistance d'une colonne de mercure à 0°ayant une longueur de 1 m et une section de 1 mm^2. L'ohm étalon est la résistance offerte par une colonne cylindrique de mercure ayant une masse de 14,4521 g et une longueur de 106,300 cm , à la température de la glace fondante [6, §37].

[30] C'est à peu près la fem d'une pile de Daniell (Cu, SO_4Cu, SO_4Zn, Zn). Si on avait choisi 10^9 au lieu de 10^8, l'unité de courant aurait été la même que celle du système UEM CGS. Doit-on le regretter ?

- L'*ampère* se déduit alors de la loi d'Ohm et vaut 10^{-1} UEM CGS d'intensité.
- De l'ampère se déduit le *coulomb* qui vaut 10^{-1} UEM CGS de quantité d'électricité[31].
- Du volt et du coulomb, via la relation $Q = CV$. se définit le *farad* qui est l'unité pratique de capacité[32].
- Nous avons donc tous les éléments pour calculer l'unité pratique de travail ou d'énergie à partir de la relation $W = QV$ par

$$\begin{aligned}10^{-1} \text{ unités électromagnétique de charge} \times 10^{8} & \text{ unités électromagnétique de fem} \\ &= 10^{7} \text{ unités électromagnétique de travail} \\ &= 10^{7} \text{ ergs}\end{aligned}$$

L'unité de travail est donc le *joule*.

- De l'unité précédente se déduit le *watt* qui vaut un *joule* par seconde, et qui est l'unité de puissance[33].

Remarque :

Le système pratique (SP), aussi appelé « système de Maxwell » (QES system), est un système électromagnétique, mais ce n'est pas le système CGS. La théorie montre en effet qu'il dérive d'un système dont les unités fondamentales sont la longueur, la masse et le temps, mais que ces dernières ont pour unité

$$\mathrm{L} = 10^{9}\ \mathrm{cm} \quad , \quad \mathrm{M} = 10^{-11}\ \mathrm{g} \quad , \quad \mathrm{T} = 1\ \mathrm{s}$$

Ce système est aussi appelé « système de Maxwell » (QES system).

Le fait que 10^9 cm soit à peu près le quart de la longueur du méridien terrestre résulte du hasard, mais, comme on le voit, les unités de longueur et de masse sont d'un emploi impraticable et seules les unités définies ci-dessus sont utilisables.

Les liens entre unités SP et unités CGS sont résumés dans le tableau ci-après :

---

[31] En chimie-physique, on utilise le *faraday* = nombre d'Avogadro * charge élémentaire = 96 500 coulombs. Dans l'industrie, c'est l'ampère.heure = 3 600 coulombs

[32] Remarquons que l'unité électromagnétique de capacité est extrêmement grande, et c'est pourquoi, en pratique, on utilise le *microfarad* qui vaut 10^{-15} unités électromagnétiques de capacité.

[33] Il existe aussi une autre unité de puissance qui est le *cheval-vapeur* et vaut 736 watts.

Système Pratique	Valeurs en unités C.G.S.	
	U.E.M.	U.E.S.
ampère	10^{-1}	$10^{-1}c = 3.10^9$
coulomb	10^{-1}	$10^{-1}c = 3.10^9$
ohm	10^9	$10^9/c^2 = 3^{-2}\,10^{-11}$
volt	10^8	$10^8/c = 3^{-1}\,10^{-2}$
farad	10^{-9}	$10^{-9}c^2 = 9.10^{11}$
micromicrofarad	10^{-21}	$10^{-21}c^2 = 0,9$
henry	10^9	$10^9/c^2 = 3^{-2}10^{-11}$

Tableau 7. Liens entre les unités du SP et celles des systèmes d'unités électriques CGS.

Le système d'unités international ou système SI.

C'est, si l'on cherche la philosophie de ce qui vient d'être écrit, l'un des systèmes les plus logiques correspondant aux avancées qui se sont déroulées successivement au cours du temps et qui élimine pratiquement la plupart des inconvénients mis en évidence par les systèmes précédents (unité de force dépendant du lieu dans le système $\mathrm{MK}_f\mathrm{S}$, unités de force et d'énergie trop petites dans le système CGS, unités peu commodes des systèmes électriques introduisant le système SP,...).

Comme nous l'avons dit, nous ne l'aborderons pas ici puisque le but de ce travail est de permettre au lecteur de s'y retrouver dans les divers systèmes utilisés par nos Anciens. Nous laissons donc la parole au BIPM [1] puisque la vulgarisation du système SI fait partie de ses missions.

Appendice sur les équations des grandeurs qui dépendent des unités par des constantes appropriées.

Nous avons vu que les constantes intervenant dans certaines formules décrivant des lois physiques et définissant les grandeurs physiques correspondantes pouvaient varier selon les systèmes d'unités choisis.

Les systèmes uem cgs et ues cgs ne sont pas les seuls systèmes électriques à avoir été utilisés. Deux autres systèmes ont été également employés, le système de Gauss et le système de Heaviside-Lorentz. Tout comme les précédents, ils sont définis par des choix particuliers de constantes dans certaines formules et dans le détail desquels nous n'entrerons pas ici.

Dans cet appendice, nous voulons simplement rassembler les principales grandeurs qui sont dans ce cas et les équations qui leur servent de définition sans chercher à les démontrer. Elles ne sont pas nombreuses et il est remarquable que toutes ces équations peuvent être décrites en fonction de quatre paramètres dont les valeurs possibles déterminent univoquement ces grandeurs physiques dans les différents systèmes.

Ces quatre paramètres sont la constante diélectrique vide ϵ_0, la perméabilité magnétique du vide μ_0 et deux nombres purs dénotés β et γ. Cependant quantités ne sont pas toutes indépendantes puisque la théorie de Maxwell montre que ϵ_0, μ_0 et γ sont reliés par

$$\frac{\gamma}{\epsilon_0\mu_0} = c^2$$

où c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques qui vaut approximativement $3\,10^{10}$ cm/s.

Leurs valeurs déterminant les différents systèmes d'unités sont définies dans le tableau suivant :

Constantes définissant les systèmes d'unités				
système	β	μ_0	γ	ϵ_0
Giorgi	1	$4\pi 10^{-7}$	1	$10^7/4\pi c^2$
uem	4π	1	1	$1/c^2$
ues	4π	$1/c^2$	1	1
de Gauss	4π	1	c	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	1

Tableau 8.

Les systèmes où β vaut 1 sont dits *rationalisés* ; ils sont construits pour que des constantes n'apparaissent pas dans les formules les plus utilisées. Les systèmes où β vaut 4π sont dits *non rationalisés*. Dans le système de Giorgi, les équations aux puissances (dimensions) définissant les grandeurs physiques ont toutes des exposants entiers.

Les quelques équations définissant les grandeurs physiques et dépendant de ces paramètres sont alors :

– l'équation définissant la charge :

$$F = \frac{\beta}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

– l'équation définissant le champ électrique

$$E = \frac{\beta}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}$$

liée à la précédente par $F = q\,E$.

– l'équation définissant le déplacement électrique

$$\int\!\!\int_S D\,dS = \beta\,q$$

liée à la précédente par $D = \epsilon_0 E$.

– l'équation définissant l'induction magnétique

$$\Phi = \int\!\!\int_S \overrightarrow{B}\, d\overrightarrow{S} \quad \text{avec} \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\gamma \int_C \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{s}$$

qui lie l'induction magnétique et le champ électrique et où Φ est le flux magnétique.

– l'équation définissant le champ magnétique

$$B = \mu_0 H$$

qui lie induction magnétique et champ magnétique.

Toutes les autres équations de définition des grandeurs physiques ont la même forme quel que soit le système d'unités choisi.

Avec les mêmes conventions, les équations de Maxwell qui ne dépendent explicitement ni de μ_0 ni de ϵ_0 s'écrivent enfin

$$\gamma\, \mathbf{rot}\, \overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0$$
$$\gamma\, \mathbf{rot}\, \overrightarrow{H} - \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} = \beta\, \overrightarrow{i}$$

où $\overrightarrow{i}$ est la densité de courant.

Remerciements.

Je tiens à remercier très sincèrement Claude Piquet de l'université Pierre et Marie Curie (Paris6) pour les nombreux échanges constructifs que nous avons eus lors de l'élaboration de ce travail, ainsi que pour les non moins nombreuses critiques qu'il a faites lors de sa rédaction : le texte ci-dessus lui doit beaucoup.

Je remercie également très vivement Daniel Fargue de l'École des mines de Paris pour sa relecture minutieuse de ce document. Ses remarques m'ont permis améliorations et approfondissements en bien des points de ce mémoire.

Bibliographie.

[1] Bureau International des Poids et Mesures, *Le Système international d'Unités (SI)*, Pavillon de Breteuil, F-92310 Sèvres, France. Cette brochure est également disponible sur Internet à l'adresse :

`http://www.bipm.fr/fr/publications/`

[2] L'histoire du mètre est aussi passionnante qu'instructive ; elle se lit comme un roman historique, et c'en est un. Le lecteur intéressé pourra consulter avec profit le site

`http://histoire.du.metre.free.fr`

où il trouvera des références utiles dans lesquelles il pourra se documenter sur les appareils qui ont servi à faire les mesures et sur la façon dont ces dernières ont été faites. Il pourra également lire le livre de : Denis Guedj, *le Mètre du Monde*, Éditions du Seuil, 2000.

[3] Fourier Joseph, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822, Editions Jacques Gabay.

[4] Maxwell James Clerck, *A treatise on Electricity and Magnetism*, 2 tomes, Dover.

[5] Curie Pierre, *Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris, 1908, Éditions des archives contemporaines.

[6] Signalons au passage un remarquable petit livre, celui de P.M. Gonnard et de C. Guillou, le *Dictionnaire des unités des grandeurs physiques*, Étienne Chiron, 1947. qui mériterait d'être réédité. Signalons aussi, sur les systèmes UNIX, la commande `units` ainsi que le fichier de données `units.dat` qui lui est attaché.

[7] Berché Paul, *Pratique et Théorie de la T.S.F.*, Les Éditions de la Librairie de la Radio (S.E.T.S.F), Paris, 1946.

[8] Bureau des Longitudes Encyclopédie scientifique de l'Univers – La physique, Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[9] Bruhat Georges *Cours de physique générale – Électricité*, Masson, Paris, 1947.