

Équilibres, Forces et Mouvement
ou
Réflexions sur quelques bases de la physique newtonienne

MICHEL KARATCHENTZEFF

Fondation Louis de Broglie, 23, rue Marsoulan, 75012 Paris, France
(29 mai 2009 – version 1.0)

Avant propos.

Ce travail ne contient rien d'original. Je l'ai fait simplement pour être certain d'avoir à l'esprit une représentation cohérente des concepts dont je me sers tous les jours.

Pourquoi donc ?

Parce que dans les meilleurs manuels du XX^e, ces concepts, comme ceux d'équilibre ou de force, sont présentés à partir de quelques expériences, peu commentées, rarement critiquées et admises comme des vérités « évidentes » dont les élèves à qui on les aura enseignés comprendront difficilement plus tard pourquoi il aura fallu environ 2000 ans pour les exprimer ainsi.

Je m'explique. La critique d'une expérience repose sur des faits : les circonstances de l'expérience, les résultats de l'expérience et les concepts qui doivent permettre de réunir le tout dans une même explication. C'est ce qu'on pourrait appeler un modèle.

On peut très bien admettre un concept. La difficulté commence dès qu'un second concept s'introduit : si on veut être cohérent, il faut alors démontrer qu'il est, soit indépendant du premier, soit compatible avec le premier. Et le problème recommence avec l'apparition d'un troisième concept, et ainsi de suite. Une théorie n'est qu'une suite cohérente d'explications de ce type et il est tout à fait concevable que ces démonstrations, qui sont loin d'être simples, ne soient pas de mise lors d'un premier abord de la physique. C'est, par contre, une erreur profonde que de ne pas signaler leur existence : tout débutant admettra alors ces « vérités » comme absolues et aura beaucoup de mal à les replacer dans leur contexte par la suite. Cette difficulté n'est pas nouvelle, c'est le propre de nos grands ancêtres d'être sorti des ornières des « vérités absolues » et c'est la principale raison pour laquelle il faut les lire : comprendre le cheminement qu'ils ont fait pour aboutir à leurs découvertes. Savoir quel est le premier qui a dit ou écrit ceci ou cela n'a, à mes yeux, que peu d'importance face à ce cheminement.

Une réflexion sur les concepts qui sont à la base des notions d'équilibre ou de force n'est donc que rarement abordée dans l'enseignement secondaire ; elle n'est pas plus développée dans l'enseignement supérieur où les concepts sont postulés comme « allant

de soi » et comme si, s'y attarder, était une perte de temps. Ce n'était pas le cas au cours des siècles précédents.

Le texte qui suit est issu de lectures diverses. C'est un essai de présentation cohérente de quelques concepts qui sont à la base de la Mécanique newtonienne, sans aucune prétention historique, l'ordre logique prévalant toujours sur l'ordre chronologique.

Nous commencerons par introduire, à partir de la notion d'équilibre, celle de « poids » qui correspond intuitivement à « ce qui est lourd ». Nous affinerons ensuite cette notion en introduisant des propriétés que nous tirerons d'expériences utilisant leviers et plans inclinés et qui nous conduiront au concept de « force », inséparable de celui de « moment ». Nous donnerons alors les éléments de base de leurs principales propriétés mathématiques.

Dans une seconde partie, nous réfléchirons aux possibilités d'application de ces « forces » ou « moments » à la notion de mouvement et nous montrerons qu'il est possible de décrire ce dernier en combinant principe d'inertie et « forces ».

Tout au long de ce texte, nous supposons que le lecteur possède les bases de la géométrie euclidienne et celles de la géométrie analytique qui lui correspond.

Équilibres et Forces

De la notion d'équilibre à la balance.

Pour éviter toute confusion de vocabulaire, j'introduis le mot « effort » qui, à ce stade, dans le système du laboratoire, ne signifie pas autre chose que ce qui s'exerce sur un corps donné et contribue ou non à son déplacement. Si le corps ne se déplace pas, je dis que les efforts exercés sur le corps se compensent et que le corps est en équilibre. À noter que ce peut être aussi vrai lorsqu'un corps se déplace, mais ce n'est pas pour l'instant le sujet.

Comme il ne sert à rien de caractériser un mot par un autre qui n'est pas mieux défini que le premier, la notion « intuitive » d'équilibre sera affinée par un certain nombre de postulats qui surgiront au gré des interprétations des expériences étudiées comme l'indiquent les figures 1 et 2.

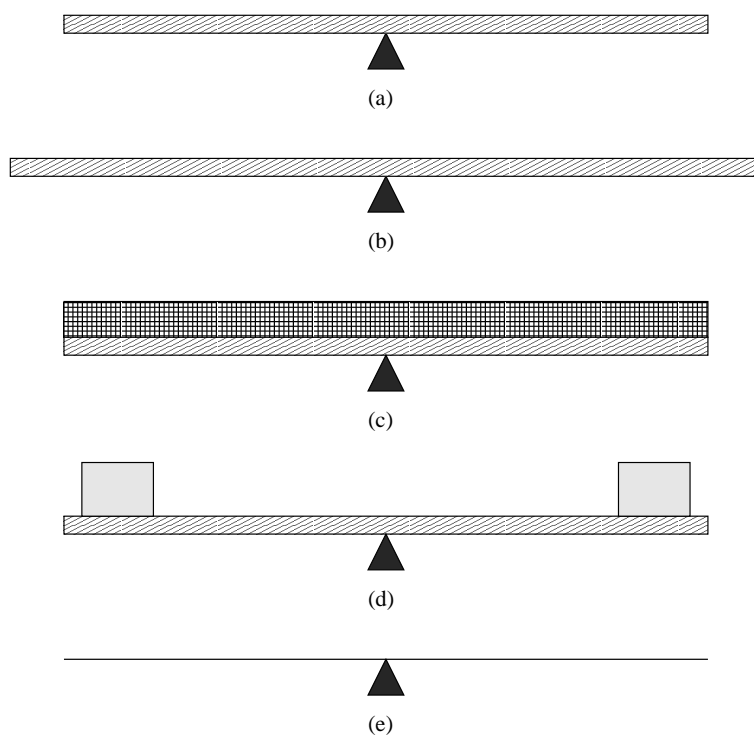


Figure 1. Diverses situations d'équilibre ; les planches sont supposées homogènes (même densité en chacune de ses parties) et chaque schéma admet un plan de symétrie vertical passant par l'axe du couteau sur lequel repose la ou les planches : (a) équilibre d'une balance simple ; (b) cet équilibre ne dépend pas de la longueur de la planche, ni de ses autres dimensions ; (c) ou du fait qu'on surmonte cette planche d'une autre, de même dimension mais de densité différente ; (d) ou de deux planches plus petites dont les dimensions et la densité sont les mêmes et placées symétriquement sur la planche ; le schéma (e) symbolisera ce genre d'équilibre. Bien d'autres sortes d'équilibres de ce type peuvent être envisagées.

DE LA BALANCE

Une planche est un parallélépipède rectangle, homogène (c'est-à-dire que chacune de ses parties a la même densité), et qui possède trois axes de symétrie concourant en un point, le centre de symétrie de la planche¹. L'expérience montre qu'elle se tient en équilibre si on la pose, par exemple, sur une arête de longueur adéquate et placée sous un de ses axes de symétrie, ce qui veut dire que les oscillations de cette planche autour de cette arête s'amortissent au cours du temps et finissent par cesser. La planche serait également en équilibre si on la suspendait par un câble au dessus de son centre de symétrie. Nous appellerons axe de rotation du système la droite autour de laquelle le système peut osciller.

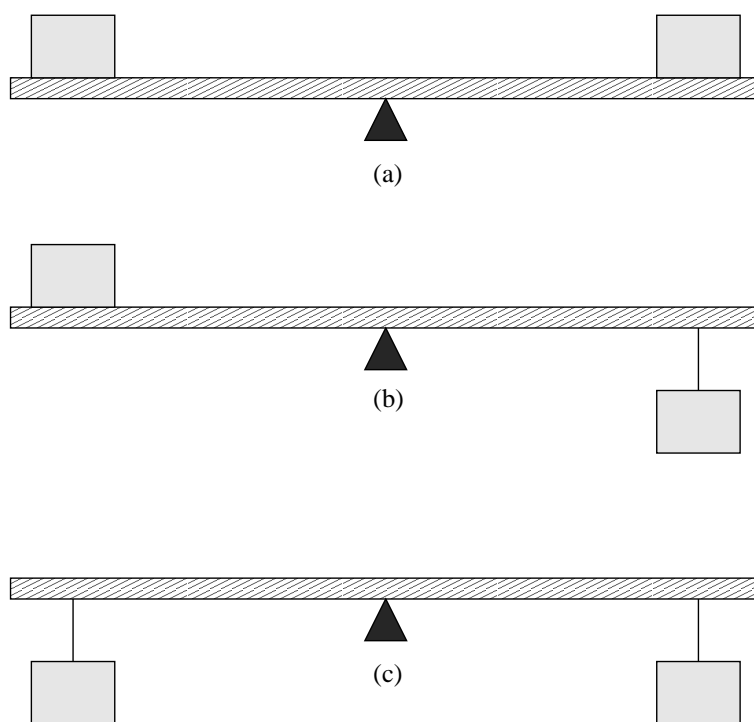


Figure 2. Quelques façons de réaliser le même équilibre : les objets sont placés différemment ; le point d'attache de chaque fil sur la planche n'est pas quelconque. En (c), les droites définies par les fils sont parallèles et la figure est symétrique par rapport au plan de symétrie du système.

Rien n'empêche alors de placer sur cette planche des éléments identiques situés à égales distances de l'axe de rotation. L'équilibre sera conservé. Ce qui importe donc, et qui est élevé au rang de postulat ou de principe, c'est la symétrie « physique » (géométrique et matérielle) par rapport au plan vertical passant par l'axe de rotation : si un système

¹ Il est évident qu'aucune planche véritable ne possède ces propriétés de symétrie et d'homogénéité. Il en sera de même pour les fils que nous utiliserons et qui seront supposés sans masse et inextensibles, et pour les « couteaux » dont les arêtes seront supposées rectiligne, etc. Tout cela n'existe pas dans la pratique, mais l'expérience montre qu'avec beaucoup de soins on peut approcher ces propriétés et considérer qu'à une certaine limite que nous ne chercherons pas à définir, elles sont vraies. Ce sont de ces limites que, désormais, nous parlerons quand il sera question de planches, fils, plans, poulies,...

possède cette symétrie, il sera en équilibre sur un axe horizontal de ce plan que nous appellerons plan de symétrie du système.

Sous cette forme très élémentaire, nous avons donc construit un objet que les enfants appellent balançoire mais que, pour faire plus sérieux, mécaniciens et physiciens dénomment « levier d'Archimède ».

Cet objet possède également un plan de symétrie dans le sens de la longueur de la planche et nous poursuivrons l'étude de ce système en le projetant sur ce plan, l'épaisseur de la planche ou de ce qu'on rajoute dessus ne changeant rien à l'équilibre.

Le principe ci-dessus ne disant rien des dimensions de la planche, une autre planche de dimensions différentes sera également en équilibre sous des conditions analogues. En pratique, cela veut dire que l'on peut « rallonger » une planche en équilibre par deux de ses extrémités en respectant les symétries : le système sera encore en équilibre.

L'expérience suivante introduit un autre principe : si on coupe la planche dans son épaisseur, cette dernière et chacun des deux morceaux sera en équilibre dans les mêmes conditions de symétrie. Le principe correspondant s'appelle principe de superposition des états d'équilibre ; il indique en particulier que s'il est possible de combiner deux systèmes en équilibre pour en faire un seul système, ou d'extraire d'un système en équilibre un système lui aussi en équilibre, on obtient encore un état d'équilibre : deux planches en équilibre superposées suivant leurs axes respectifs donnent encore un état d'équilibre. Nous aurons l'occasion d'utiliser ce principe extrêmement fécond.

LA NOTION DE « POIDS » :

Lorsqu'on déplace un corps quelconque, on exerce un « effort » que l'on exprime en disant par exemple que : « Ce corps est lourd ». C'est cette « lourdeur » que nous voulons définir en lui associant un nombre, on dit quantifier, qui précise des phrases comme : « Un corps est plus lourd qu'un autre » ou « aussi lourd qu'un autre. » Pour cela, nous allons faire du levier d'Archimède un appareil de mesure permettant d'introduire une notion appelée « poids » que nous définirons progressivement à partir de propriétés expérimentales mises en évidence par le « levier ».

Si nous plaçons sur l'une des extrémités d'un levier d'Archimède en équilibre un corps quelconque, nommé A , le système est soumis à un effort supplémentaire qui rompt l'équilibre qu'il possédait précédemment. Nous commencerons par dire que cette situation est due au « poids » du corps en question. Si sur l'autre extrémité du levier, nous plaçons un autre corps, nommé B , de trois choses l'une :

- ou le système revient à l'équilibre, et nous dirons que les poids des corps A et B sont égaux.
- ou le système reste dans le même état ; nous dirons alors que le poids du corps A est supérieur à celui du corps B ;
- ou le système bascule dans l'autre sens, et nous dirons que c'est le poids du corps B qui est supérieur à celui de A ;

Cette description qualitative est très intuitive et a besoin d'être affinée. Par exemple, que signifie exactement « placer sur l'extrémité d'un levier ». Pour répondre à ce genre de question, il faut expliciter quelques propriétés du levier d'Archimède.

En expérimentant sur ce dernier, il est facile de constater qu'on peut conserver l'équilibre de la figure (1-d) en la modifiant de la manière expliquée sur les schémas de la figure 2, c'est-à-dire en suspendant les objets sous la planche. Les passages successifs (2-a) vers (2-b) puis vers (2-c) montrent que le même équilibre est conservé : l'action des corps, qui par définition ont le même poids, exerce toujours le même effort sur le levier pourvu que les fils les reliant à la planche soient bien placés.

Il est évident que les expériences ainsi décrites ne sont que schématisées et que pour les effectuer de façon plus aisément reproductible, il faudra modifier l'appareillage. C'est ainsi qu'on passera du « levier d'Archimède » à la balance (figure 3).

Il est non moins évident qu'il faudra donner dans leur détail les éléments nécessaires permettant à quiconque de reproduire à la fois la balance et les mesures. C'est ce qu'on appelle un protocole. Nous n'insisterons pas sur les qualités de justesse et de précision d'une balance, propriétés que nous supposons connues du lecteur.

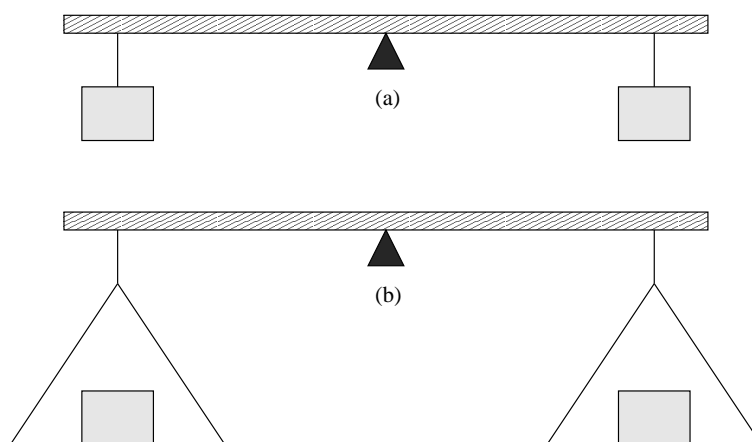


Figure 3. Du levier d'Archimède à la balance.

Nous allons maintenant donner un sens quantitatif à des phrases comme : « Un objet est plus lourd qu'un autre. » ou « Un objet est aussi lourd qu'un autre. »

En effet, nous sommes maintenant capables de dire que deux objets ont les mêmes effets sur une balance ; nous dirons alors qu'ils ont le même poids ou que leurs poids sont égaux². Cette notion peut encore se préciser. Il est en effet possible de définir un étalon de poids, et c'est ce que nous ferons, mais il sera impossible de dire qu'un corps « pèse » deux étalons de poids sans postuler que si l'on met dans le plateau d'une balance deux étalons de poids, ils pèseront deux fois un étalon de poids. C'est ce que l'expérience montre et c'est ce que nous postulerons aussi.

Nous admettrons donc

- que nous avons défini un étalon de poids³ ;

² Au XVI^e siècle, on disait joliment « égaux en pesanteur ».

³ Par exemple, le poids correspondant à une quantité de volume (dm³) d'un liquide (l'eau) sous des conditions données de température et de pression. C'est pour cette raison que l'on a été conduit à choisir naturellement comme premier système d'unité universelle le système MK_pS ; l'expérience a montré par la suite que ce n'était cependant pas le système le plus pratique à utiliser.

- que nous sommes capables de mesurer le poids d'une quantité quelconque par rapport à cet étalon de poids. Le résultat de la mesure est un nombre réel appelé « intensité du poids correspondant »⁴ et il est traditionnellement symbolisé par la lettre P .

Autrement dit, nous admettons que, sur un même plateau de balance, les intensités des poids s'additionnent.

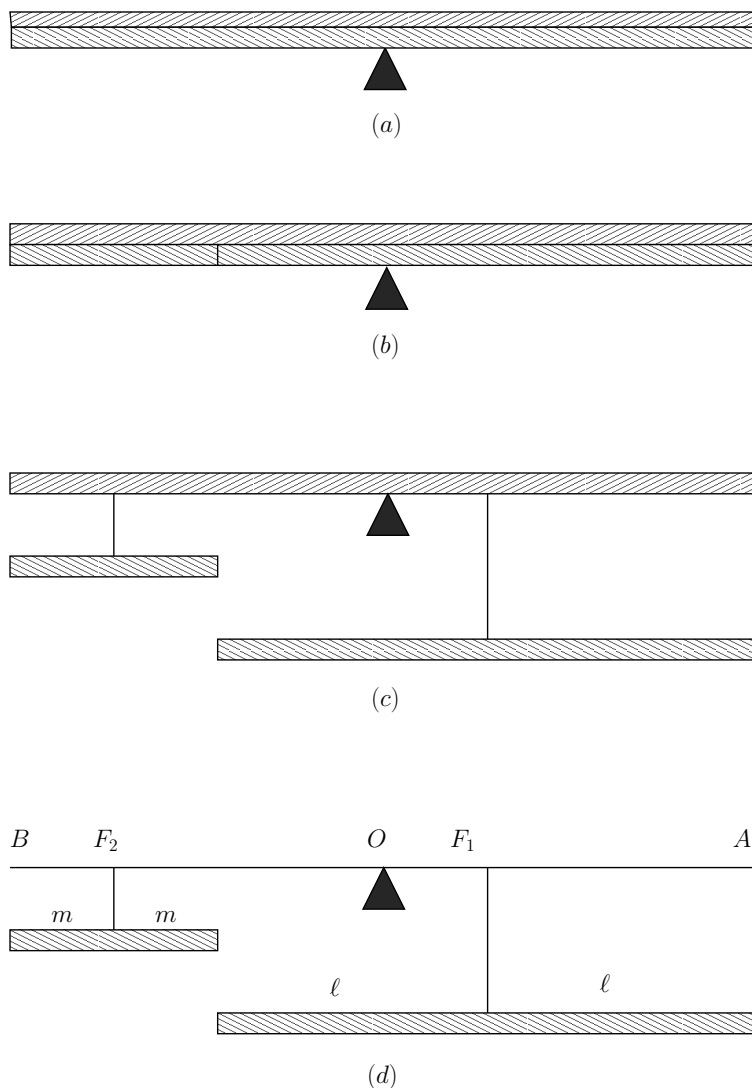


Figure 4. Représentation de la suite d'équilibres équivalents conduisant à la relation fondamentale des leviers. En (a), deux planches superposées sont en équilibre ; en (b), cet équilibre n'est pas rompu si la planche du dessous est scindée et collée à la planche supérieure ; en (c), le système conserve son équilibre si les deux planches sont suspendues au dessus de leurs centre de symétrie, la longueur de la corde n'intervient pas ; en (d), sont indiqués les paramètres du système.

⁴ Pour faire ces mesures, il suffit de savoir construire à partir d'un poids unité ses multiples et sous-multiples. La théorie du levier fournit alors une méthode pratique pour obtenir ce résultat.

Avec les éléments dont nous disposons, nous pouvons alors préciser les caractéristiques de l'effort exercé sur la balance par un objet quelconque, c'est-à-dire son poids, qui sera défini par

- une direction, symbolisée par le fil qui soutient le plateau de la balance et que l'on appelle « verticale » ; on notera que la longueur de ce fil n'influe pas sur le résultat ;
- un sens, le poids tire le fléau vers le bas ;
- un point d'application : le sommet du « couteau » qui porte le fil du plateau ;
- le nombre P qui indique l'intensité de l'effort et dont nous venons de parler.

Ces hypothèses sont à la base de la théorie du levier dont Archimède a été l'un des initiateurs les plus fameux, théorie qui consiste, en déplaçant le couteau central et en modifiant les poids, à expliquer, lors de l'équilibre, les liens existant entre les longueurs des fléaux et les poids. Il est possible de l'illustrer de la façon suivante qui met en évidence la relation fondamentale des leviers.

Prenons pour guide la situation d'équilibre de la figure 1-c que nous représentons légèrement modifiée dans sa forme sur la figure 4-a.

L'équilibre ne sera pas modifié si l'on remplace la “planche” inférieure par deux “planches” obtenue en sciant en deux n'importe où la planche précédente (Figure 4-b) et en les collant à cette dernière.

Il ne sera pas non plus modifié si, au lieu de les coller, nous les suspendons, comme dans le cas décrit sur la figure 2-c, par un fil dont le prolongement passe par le centre de symétrie de chacune des “planches” et qui est fixé verticalement sur la planche supérieure (Figure 4-c).

Il ne nous reste plus qu'à décrire géométriquement la situation obtenue. Pour cela, il est plus facile de réduire à une dimension la planche supérieure, ce qui ne change rien à l'état d'équilibre du système (Figure 4-d).

Soit F_1 le point de la planche supérieure d'où part le fil relié à la planche de droite de longueur 2ℓ . Soient de même F_2 et $2m$ les quantités correspondantes pour la planche de gauche. Soit enfin O , A et B , le centre d'équilibre de l'ensemble et les extrémités de la planche supérieure (Figure 4-d).

Nous avons alors les relations géométriques suivantes :

$$OF_1 = OA - F_1A = \ell + m - \ell = m \quad ; \quad OF_2 = OB - F_2B = \ell + m - m = \ell$$

qui sont reliées par :

$$\ell \times OF_1 = m \times OF_2$$

et comme les longueurs sont proportionnelles aux intensités des poids

$$(1) \quad P_1 \times OF_1 = P_2 \times OF_2$$

où P_1 et P_2 sont respectivement les intensités des poids, en unité quelconque, associés à la planche de droite et à celle de gauche⁵.

⁵ Le lecteur pourra remarquer que l'on peut obtenir directement la relation ci-dessus à partir de la figure 4-b (il suffit de supposer que les planches sont collées en un point situé juste au dessus de leur centre de symétrie). Il nous a cependant paru plus clair de procéder comme nous l'avons fait en mettant en évidence les propriétés d'équilibre des différents éléments.

Cette relation est appelée *relation fondamentale des leviers* et permet de résoudre la plupart des problèmes élémentaires les concernant.

De l'équilibre du plan incliné à la notion de force.

Comme toujours en physique, il faut rechercher si les notions que nous venons d'introduire à propos du poids ne peuvent pas être reliées à d'autres phénomènes que nous propose la nature⁶, c'est-à-dire être interprétées dans d'autres expériences qui préciseront ou étendront leur domaine de validité.

Les expériences que nous avons choisies sont celles relatives aux équilibres sur des plans inclinés. Ces derniers sont constitués en réalité de deux rectangles plan ; ils ont, par exemple, mêmes longueurs, les largeurs de chaque rectangle pouvant être différentes ; on joint alors deux des longueurs, les côtés opposés reposant sur un plan horizontal ; le tout ressemble à un toit à double pente. En coupe verticale, la figure formée est celle d'un triangle à base horizontale⁷.

Le principe de ces expériences est très simple : sur chacun de ces plans glisse sans frottement un mobile. Les deux mobiles sont reliés par un fil sans poids qui passe par le sommet opposé à la base horizontale autour d'une poulie censée répercuter sans les altérer les efforts transmis.

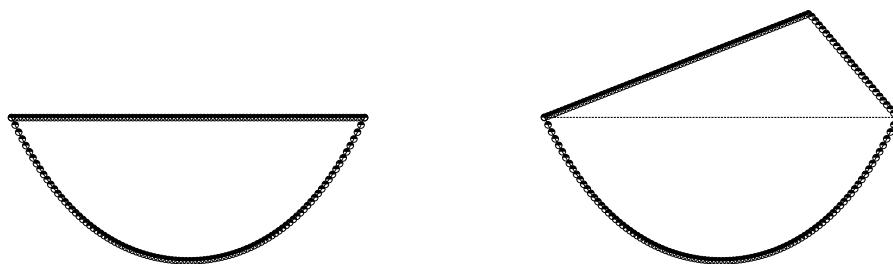


Figure 5. Que la chaîne entoure un plan horizontal ou des plans inclinés, le système est, dans chaque cas, en équilibre. Si la longueur de la chaîne située en dessous du plan horizontal est la même, les courbes qu'elles représentent dans chaque cas seront les mêmes : une chaînette. La figure de droite correspond à l'exemple de Stevin au détail près que ce dernier avait remplacé sur ses schémas la chaîne par une suite de boules attachées les unes aux autres, comme des perles. Stevin était tellement fier de sa démonstration qu'il a demandé que ce dessin soit gravé sur sa tombe.

Ces expériences sont actuellement très faciles à monter. On peut utiliser des roulements à aiguilles avec un petit cylindre, lui aussi monté sur roulements, que l'on placera au sommet. L'un des plans inclinés peut, bien entendu être vertical. Pendant des années,

⁶ Cette réflexion est essentielle. Si on ne la fait pas, on risque de remplacer un concept par une autre, de définir un mot par un autre mot, parfois par plusieurs et qui ne sont, eux-mêmes pas définis. Une réflexion sur la base de ce propos constitue d'ailleurs un bon critère de validité d'un ouvrage scientifique.

⁷ Cette forme géométrique, le triangle, est particulièrement bien adaptée pour concevoir des expériences mettant en évidence la décomposition triangulaire des forces, et d'en induire la *règle du parallélogramme*.

avant qu'on les juge inutiles ou désuètes, on pouvait voir de telles expériences au Palais de la découverte (à Paris) où les mobiles étaient de simples petits chariots montés sur roues. Les résultats que ces expériences présentaient étaient parfaitement clairs. Ils conduisaient à une multitude de questions et à leurs réponses, comme nous allons le voir à partir de certaines d'entre elles.

Considérons donc une chaîne fermée qui entoure les plans inclinés et qui est suspendue librement dès qu'est franchi le plan horizontal (figure 5).

Le système est en équilibre. C'est connu de tout temps : si l'on ne veut pas qu'une corde ou une chaîne glisse de son support, il faut en attacher les deux extrémités. C'est ce que font les joailliers avec colliers et bracelets, les marins avec les noeuds, les maçons et les charpentiers avec cordes ou chaînes passées autour d'une poulie ou tout simplement d'une poutre. Les exemples sont innombrables et ont été vus à un moment ou un autre par tout être humain au cours des âges.

C'est Simon Stevin (1548–1620) qui a su en tirer parti. Son idée géniale n'a pas été de s'apercevoir qu'une chaîne suspendue autour d'une poutre était en équilibre si on attachait ses deux extrémités, ce que tout le monde savait, mais de s'apercevoir que cet équilibre était composé de deux équilibres indépendants et d'en tirer les conséquences.

Pour sa démonstration, Stevin⁸ n'utilise pas une chaîne au sens où nous l'entendons, mais un système de quatorze boules reliées entre elles, posées sur un double plan incliné à base horizontale. Huit des boules sont suspendues dans le vide et se font face deux à deux, quatre sont sur l'un des plans et deux sur l'autre. Comme son raisonnement s'applique à notre chaîne, nous allons le suivre pas à pas.

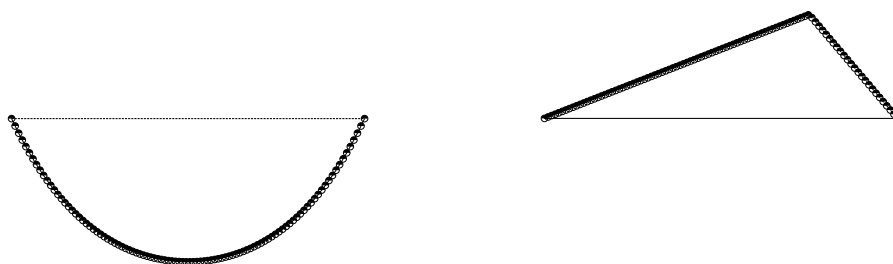


Figure 6. L'équilibre des chaînes. La partie inférieure de la chaîne, celle qui se trouve en dessous du plan horizontal est en équilibre par elle même (figure de gauche). En vertu du principe de superposition des états d'équilibre, il en sera de même pour la partie supérieure après suppression de la partie inférieure (figure de droite).

Tout d'abord, Stevin montre qu'un tel système où la chaîne peut glisser librement est en équilibre en arguant du fait que s'il n'y était pas, il commencerait à tourner et se retrouverait dans une configuration semblable. Il continuerait donc à tourner dans le même sens, ce qui engendrerait un mouvement perpétuel, ce qu'il juge impossible.

⁸ Les œuvres de Stevin ont tout d'abord été publiées en flamand, avant d'être traduites en latin, puis en français sous le titre *Œuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges* dans une édition commentée par Albert Girard Samiélois, imprimée à Leyde chez Bonaventure at Abraham Elsevier en 1634. On peut également les trouver sur Internet à l'adresse :

<http://polib.poleuniv-lille-npdc.fr/data/XVII/V/2/index.html>

Ensuite il utilise le fait que, si elle était seule, la partie de chaîne située en dessous du plan horizontal serait elle aussi en équilibre (figure 6, partie gauche). Il applique alors le principe de superposition des états d'équilibre pour supprimer cette partie de chaîne. Le système, étant en équilibre, y reste (figure 6, partie droite).

L'effort exercé par l'ensemble des maillons de l'un des plans inclinés compense donc l'effort exercé par les maillons de l'autre plan. La chaîne étant homogène, le nombre des maillons d'un côté est au nombre de l'autre dans le même rapport que celui de la longueur des côtés des plans sur lesquels ils sont appuyés⁹.

Autrement dit, si on déplace sur plan horizontal le sommet B du triangle de la figure 7-a en laissant les deux autres sommets A et C fixes, la hauteur issue de A conserve la même valeur, et, si l'on ajuste uniformément les maillons de la chaîne du côté gauche, l'effort qu'elle exercera sera encore compensé par celui de la chaîne de droite.

Algébriquement, c'est-à-dire avec les notations actuelles, si l_1 (resp. l_2) représente la longueur du plan incliné gauche, (resp. droit), et si n_1 et n_2 sont les nombres de maillons correspondant, on aura la relation :

$$\frac{n_1}{l_1} = \frac{n_2}{l_2} \quad \text{ou, en faisant apparaître la hauteur } h \text{ du triangle : } n_1 \frac{h}{l_1} = n_2 \frac{h}{l_2}$$

h/l_1 et h/l_2 représentent les sinus des angles que font les plans inclinés avec l'horizontale. En les explicitant, nous avons la relation :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

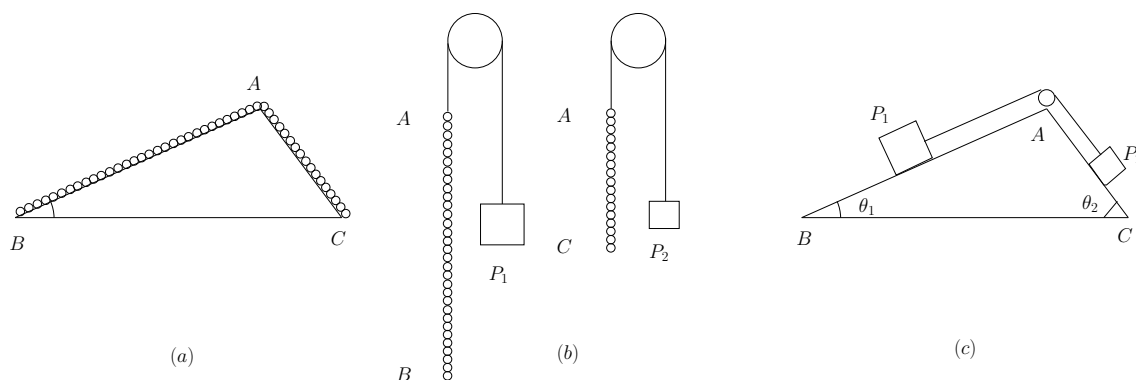


Figure 7. L'équilibre des poids. La forme du poids n'intervient pas, seule sa valeur compte. Dans cette expérience, on a remplacé la partie de chaîne qui occupait le côté AB par un poids qui lui équivaut : P_1 . On en a fait de même pour AC. À chaque étape, l'équilibre demeure quel que soit l'ordre dans lequel on remplace les chaînes. Il est également important de noter que la longueur des fils n'intervient pas tant que les poids reposent sur les côtés.

⁹ Ce raisonnement est tout à fait remarquable et je comprends que Simon Stevin en ait été très fier. Sur un exemple judicieusement choisi, pour étayer sa démonstration, il applique, successivement l'impossibilité d'un mouvement perpétuel et le principe de la composition des états d'équilibres. C'est du grand Art.

La chaîne étant supposée homogène, le poids des maillons est proportionnel à leur longueur, c'est-à-dire à leur nombre. Si nous définissons, en unités quelconques, par P_1 (resp. P_2) l'intensité du poids des n_1 (resp. n_2) maillons, cette relation peut s'écrire :

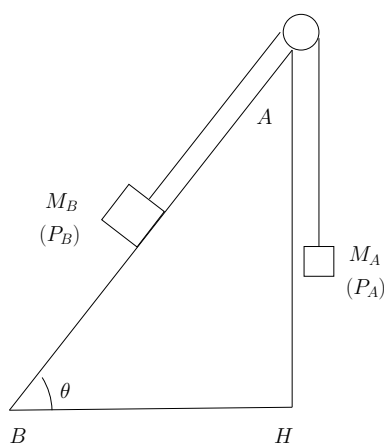
$$(2) \quad P_1 \sin \theta_1 = P_2 \sin \theta_2$$

et nous la désignerons comme étant la relation de fondamentale des plans inclinés. Il faut noter, de plus que, dans ces relations, les longueurs n'interviennent pas.

D'après cette formule, sur chaque côté, la chaîne peut être remplacée par un corps de même poids, ces éléments étant reliés par un fil passant autour d'une poulie placée au sommet du triangle. Mais, jusque là, le résultat n'est que mathématique.

Il faut maintenant vérifier l'équivalence de comportement entre une chaîne et un corps dont le poids équivaut à ses maillons. Autrement dit, vérifier que la forme du corps n'intervient pas, que seul son poids compte. La vérification expérimentale de cette assertion s'obtient en changeant successivement chaque élément de chaîne par un corps pesant le même poids (les deux corps équilibrant une balance). L'expérience qui le montre est schématisée sur la figure 7.

On remplace donc les deux morceaux de la chaîne initiale par des éléments de même poids sans que l'équilibre soit rompu. C'est un nouveau postulat, vérifié par l'expérience. Il reste, à nouveau, à en tirer parti.



Commençons par simplifier l'expérience précédente en rendant l'un des plans inclinés vertical comme le montre la figure ci-contre.

La loi fondamentale des plans inclinés s'écrit dans ce cas

$$P_A = P_B \sin \theta$$

Figure 8. Cette figure n'est autre que la partie gauche de la figure 7 où le plan AC rendu vertical est représenté ici par le plan AH.

Dans cette expérience, le poids P_A caractérise :

- une direction, la verticale, par le fil qui le soutient ;
- un sens, car il tire le système vers le bas (si on coupe le fil, le poids tombe) ;
- un point d'application, celui où le fil est attaché au poids ; mais le choix de ce point est arbitraire tant qu'il se trouve sur le fil ou sur le prolongement de ce dernier puisque l'équilibre ne dépend pas de la longueur du fil ;

- la valeur de la mesure du poids (son intensité) ;
- l'addition des valeurs des poids suspendus sur un même fil, comme nous l'avons vu à propos du levier d'Archimède et de la balance.

Actuellement on schématise ces caractéristiques par un segment de droite terminé par une flèche. Cette notation est analogue à celle des vecteurs de la géométrie euclidienne. Ce « vecteur »¹⁰ est placé le long du fil, son origine est le point de suspension du poids et son extrémité se trouve dans la direction où tire le poids ; sa longueur correspond à la valeur du poids (son intensité) dans une unité convenue. L'usage est de le représenter par son module avec une flèche le surmontant, par exemple \vec{P}_A ¹¹.

Dans nos hypothèses, la poulie transmet intégralement l'effort qui est exercé sur le fil. Si l'on coupait ce dernier et que l'on voulait que le système restât en équilibre, il faudrait faire un effort pour retenir le poids P_B qui correspondrait à celui créé par le poids P_A . L'expérience qui rend claire cette assertion est représentée sur la figure 9 ; l'hypothèse faite sur la poulie rend son résultat évident.

Cet effort, puisque le point M_B ne remonte pas la pente est donc compensé par un autre effort, créé par le poids P_B du point M_B en tout semblable au précédent, mais de sens opposé, ce qui nous autorise à le noter $-\vec{P}_A$.

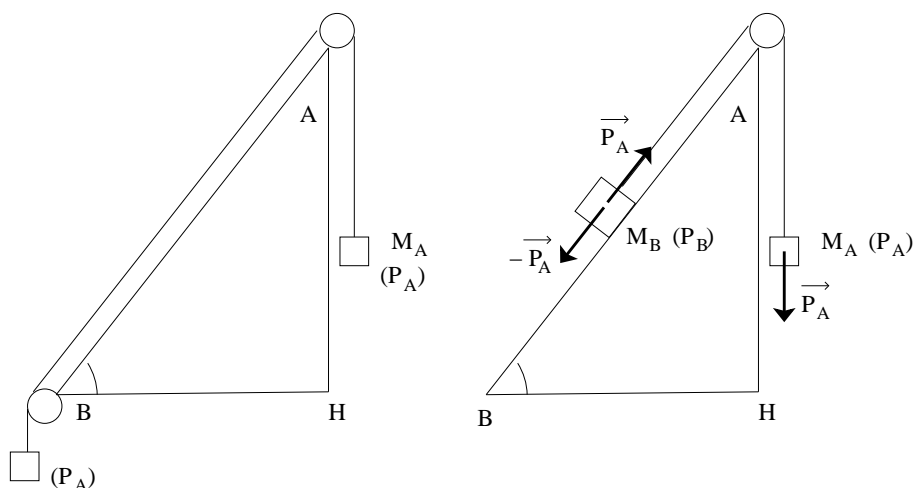


Figure 9. Sur la figure de gauche, les poids P_A sont en équilibre, ce qui justifie, figure de droite, l'hypothèse de la transmission intégrale des efforts via une poulie le long du fil. Si on coupe le fil entre A et B , pour conserver l'équilibre, il faudra lui attacher un poids $P_B > P_A$ dont la valeur est définie par la relation fondamentale des plans inclinés $P_A = P_B \sin \theta$.

L'effort transmis par la poulie en A peut donc être symbolisé par un « vecteur » analogue à celui s'exerçant sur P_A , à ceci près que la direction de ce « vecteur » est celle de la plus grande pente du plan incliné.

¹⁰ Cette dénomination de « vecteur » prête à confusion, car, en mathématiques, un « vecteur » est un élément d'un espace vectoriel. De plus, elle tend à les identifier dans l'esprit du lecteur poids (et forces) avec les vecteurs de la géométrie euclidienne, ce qui est une erreur.

On a construit des êtres mathématiques qui correspondent à ces caractéristiques physiques ; ils s'appellent des « glisseurs » et ce ne sont pas des éléments d'un espace vectoriel.

¹¹ Cette notation ajoute à la confusion avec les vecteurs de la géométrie euclidienne.

Nous pouvons alors représenter ces différents « vecteurs » sur la figure 10 et nous conviendrons désormais de les appeler « forces ». La position de leurs origines n'a que peu d'importance puisque nous avons vu que la propriété du fil était de transmettre intégralement l'effort.

Nous n'avons jusqu'ici parlé que de la force associée au poids P_A . Qu'en est-il de celle associée au poids P_B ? Est-il possible de la représenter sur le même schéma ?

La réponse à cette question est « oui », car il existe un lien entre ces deux quantités donné par la relation fondamentale des plans inclinés et qu'il est facile de faire apparaître géométriquement sur le graphique à partir du centre M_B du poids P_B . Cette représentation est montrée sur la figure 10 :

P_B défini par $P_B = P_A / \sin \theta$ correspond à la longueur du segment $M_B J$; qui plus est, par définition, ce segment est vertical ; il est donc parfaitement logique, compte tenu de la définition de la force P_A de définir la force P_B comme étant verticale, d'origine M_B et de longueur $M_B J = P_B$. Les deux triangles $M_B I J$ et $M_B J K$ sont donc deux triangles rectangles égaux, d'hypoténuse $M J$.

Il est alors tentant d'interpréter, dans le triangle $M_B I J$ dont deux des côtés sont des forces, le troisième côté, $I J$ comme une force également, dirigée de I vers J et de dire que c'est la force qui « complète » P_A pour obtenir P_B . C'est ce qu'on trouve dans certains livres, mais cela conduit à confondre vecteurs mathématiques et forces puisque ce vecteur, ainsi défini, n'a pas de point d'application.

Il est plus conforme à l'esprit de la physique, de rappeler qu'une force a besoin d'un point d'application physique, ce que ne possède pas le point I , mais que M_B satisfait. Si un vecteur peut alors avoir un sens physique et s'interpréter comme une force, c'est donc le vecteur $M_B K$. De quelle force s'agit-il ? Bien évidemment, de celle par laquelle le poids M_B agit sur le plan incliné et tend à l'écraser ; elle est donc dirigée vers le bas¹². Pour que le système reste stable, il faut que cette force soit contrebalancée (postulat de l'action et de la réaction) par une force égale et opposée : c'est là que s'introduit la réaction du plan incliné.

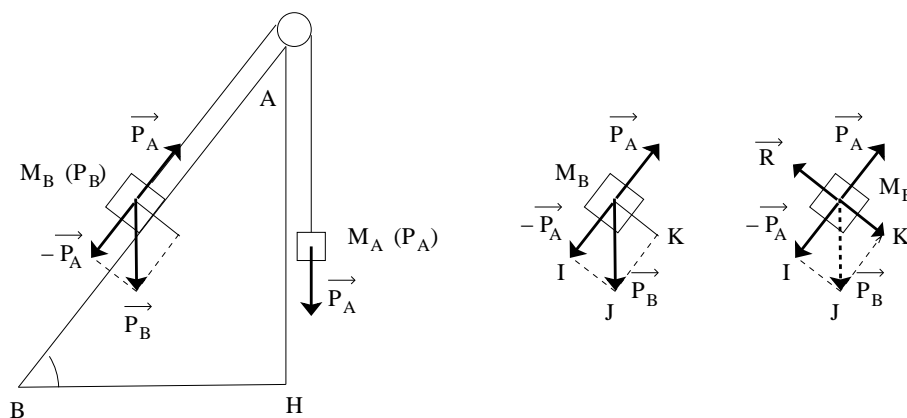


Figure 10. Décomposition de la force de pesanteur \vec{P}_B lors de la pose de M_B sur le plan incliné : les forces introduites doivent à la fois équilibrer la tension P_A et la réaction du plan incliné puisque tout le système est en équilibre.

¹² Si le poids P_B est trop élevé, le plan incliné s'effondrera sous son action ; il n'explosera pas vers le haut.

Dans ces conditions, il est aussi possible d'interpréter en termes de forces les quantités $\overrightarrow{M_B K} = -\overrightarrow{R}$, $-\overrightarrow{P_A}$ et $\overrightarrow{P_B}$ en convenant que la force de pesanteur $\overrightarrow{P_B}$ se décompose lorsque le corps M_B est placé au contact du plan incliné en deux forces : l'une qui s'oppose à la force $\overrightarrow{P_A}$ et l'autre qui appuie sur le plan incliné. Ces deux dernières forces étant obtenues selon la règle expliquée précédemment et qu'on appelle communément *règle du parallélogramme* qui n'est pour l'instant justifiée que lorsque les vecteurs issus de la décomposition sont orthogonaux.

Cette règle s'écrit formellement :

$$\overrightarrow{P_B} = \overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{MK}$$

et, de ce fait, elle accroît la confusion avec l'addition des vecteurs de la géométrie avec laquelle il faut bien voir qu'elle n'a que des rapports lointains.

Explicitons cela. Tout vecteur de la géométrie peut être remplacé par deux autres vecteurs selon la règle du parallélogramme, et ce d'une infinité de manière. Bien au contraire, avec les forces, la décomposition de la force correspondant au poids B est due aux conditions expérimentales : la force $\overrightarrow{P_B}$ est remplacée par deux forces construites à partir des conditions aux limites ; elle n'existe donc plus en tant que telle dès qu'on pose M_B sur le plan incliné ; la force \overrightarrow{MK} est équilibrée par la réaction du plan (qui ne plie pas) et n'intervient plus dans l'équilibre d'après le principe de superposition. Reste donc $\overrightarrow{P_A}$ qui équilibre le fil tendu.

Pour les forces, la décomposition correspond au remplacement d'une force par deux autres du fait des conditions expérimentales. Aucune autre décomposition n'a de sens physique.

Des forces et de leurs propriétés.

Résumons les différents concepts que nous avons été conduits à introduire et à admettre.

Les différents efforts qui peuvent être exercés sur un corps en équilibre peuvent être caractérisés par des grandeurs physiques appelées *forces*.

Une force est donc définie par :

- une direction, symbolisée par une droite et appelée support de la force ;
- un sens sur ce support ;
- un point d'application, quelconque sur le support ;
- une « intensité » appelée aussi module qui mesure la grandeur de la force ;

Nous retrouvons les mêmes notions que nous avons induites à partir des expériences sur le levier d'Archimède et la balance. Mais nous avons fait un pas de plus : nous savons maintenant que les forces peuvent se « composer » en s'additionnant algébriquement si elles sont sur une même direction, ou en suivant la règle du parallélogramme si elles ont même point d'application.

Attention, dans cette loi de composition, la notion de support est tout à fait essentielle et elle n'a pas d'analogue dans la géométrie euclidienne : ce sont les changements de conditions expérimentales qui *imposent* cette décomposition. Par exemple, le corps M_B livré à lui-même n'est soumis qu'à son propre poids ; ce n'est qu'en le déposant sur

le plan incliné que la force correspondant à ce poids est remplacée par deux autres forces déterminées à partir des conditions géométriques du problème, conditions qui imposent les supports de ces forces ; seules ces forces ont une réalité physique alors que mathématiquement, si on assimilait $\overrightarrow{P_B}$ à un vecteur de l'espace euclidien, il pourrait être décomposé suivant deux directions indépendantes passant par l'origine.

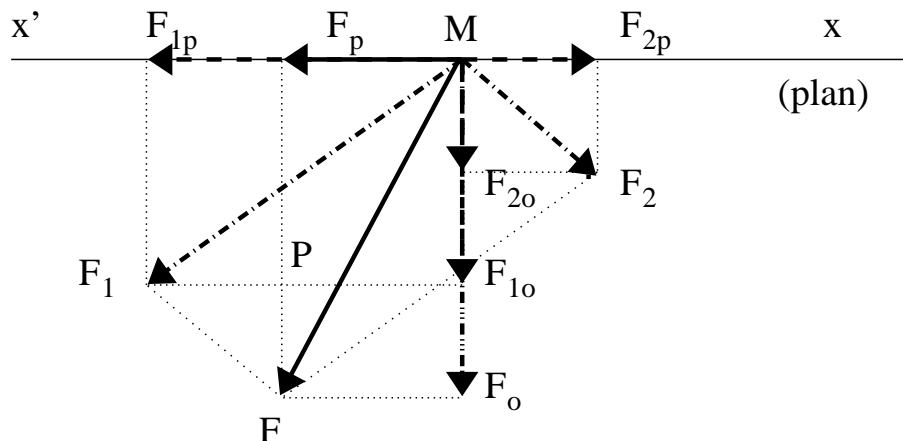


Figure 11. Le plan représenté sur la figure est celui formé par les forces $\overrightarrow{MF_1}$, $\overrightarrow{MF_2}$ et le point M ; le plan sur lequel ces forces s'exercent se projette sur la droite xx' passant par M . La décomposition des forces s'ensuit.

usqu'ici, nous n'avons énoncé la règle de décomposition des forces que dans le cas de supports orthogonaux. Cette règle s'étend à des supports quelconques pourvu qu'ils soient concourants : *si deux forces exercées sur un plan concourent en un même point, la règle de composition sera la même.*

Démontrons cette proposition en utilisant l'hypothèse de la décomposition de chacune des forces sur un support selon deux directions orthogonales. Les directions des deux forces F_1 , F_2 et le point M forment un plan que nous choisissons comme plan de la figure 11 ; il est perpendiculaire au plan xx' sur lequel les forces s'exercent. Puisque les forces agissent sur ce dernier, elles se décomposent chacune en une force perpendiculaire au plan et une autre force dans le plan.

Plus précisément, avec les notations usuelles de la géométrie euclidienne

$$\overrightarrow{MF_1} = \overrightarrow{MF_{1o}} + \overrightarrow{MF_{1p}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MF_2} = \overrightarrow{MF_{2o}} + \overrightarrow{MF_{2p}}$$

où = signifie ici « se décompose en ».

Sur chacun des axes, chaque composante est une force et les forces s'additionnent algébriquement, ce qui s'écrit :

$$\overrightarrow{MF_{1o}} + \overrightarrow{MF_{2o}} = \overrightarrow{MF_o} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MF_{1p}} + \overrightarrow{MF_{2p}} = \overrightarrow{MF_p}$$

En particulier, nous avons par construction :

$$MF_{2o} = F_o F_{1o} = PF \quad \text{et} \quad MF_{2p} = F_p F_{1p} = PF_1$$

Les triangles rectangles $F_{2p}MF_2$ et F_1PF sont donc égaux et le quadrilatère MF_1FF_2 est un parallélogramme puisque deux de ses côtés sont parallèles et égaux. La résultante \overrightarrow{MF} peut donc être construite directement comme étant la diagonale du parallélogramme défini à partir de $\overrightarrow{MF_1}$ et $\overrightarrow{MF_2}$. C'est ce que nous voulions démontrer.

Insistons à nouveau sur le fait que la notion de force est liée avant tout à la position dans l'espace d'un axe orienté, son support, et qu'elle ressemble à celle d'un vecteur de la géométrie euclidienne que dans des cas très particuliers comme celui de la composition de deux forces issues d'un même point où l'on retrouve la même règle "d'addition" que celle de la géométrie. Il est alors loisible d'utiliser les mêmes outils de géométrie analytique pour évaluer certaines grandeurs. Mais cela ne veut pas dire que ces grandeurs auront toujours un sens physique. En particulier, dans le plan ou dans l'espace, la décomposition d'un vecteur selon deux ou trois vecteurs est toujours possible en géométrie et admet une infinité de solutions ; mais si le vecteur représente une force, les vecteurs de la décomposition ne seront des forces que si les conditions physiques leurs permettent de se développer ; là, si elle existe, la solution a toute chance d'être unique¹³.

L'apport géométrique de Varignon. La notion de moment.

À ceux qui seraient tentés de croire que, puisque les mathématiques des vecteurs de la géométrie ne s'appliquent pas directement aux forces, elles sont inutiles, Pierre Varignon (1654 - 1722) apporte un démenti cinglant en jetant les bases géométriques de ce qui sera l'outil mathématique associé aux forces¹⁴.

Résumons ce qui va suivre. Nous allons énoncer, puis démontrer, un théorème proposé par Varignon¹⁵. Nous montrerons ensuite qu'une définition d'une orientation du plan, donc de l'espace, permet d'associer un signe à la valeur de l'aire d'un triangle et d'exprimer de façon algébrique le théorème de Varignon. Enfin, de ces résultats sortiront la définition du *produit vectoriel de deux vecteurs* et celle de *moment d'une force*.

¹³ Pour résumer, les forces ne sont pas des vecteurs de la géométrie euclidienne bien qu'il soit possible de leur appliquer certains calculs issus de cette dernière.

¹⁴ Ce sera la théorie des glisseurs et des torseurs bien connue des ouvrages de Mécanique ; voir la note en fin de chapitre sur ce sujet.

¹⁵ Dans la plupart des traités, lorsqu'on évoque le nom de Varignon, c'est pour l'associer à un théorème que tout élève, qui a entendu parler du théorème de Thalès, démontre en un clin d'oeil.

Ce n'est pas rendre hommage à l'un des plus illustres savants de son temps, correspondant de Newton, Leibniz ou des frères Jacob et Johann Bernoulli, géomètre de talent, promoteur du calcul différentiel, que d'associer son nom à un théorème élémentaire qui doit être connu depuis la plus haute Antiquité.

Il en est de même de la propriété dont nous parlons (en langage actuel : *Le moment d'une somme est égal à la somme des moments*) ; elle n'apparaît dans les ouvrages que comme un sous-produit évident de règles et de définitions données *a priori* (torseurs) sans que l'on ne trouve jamais indiqué que c'est la démonstration de ce théorème qui est à la base de l'introduction des notions de produit vectoriel et de « moment » qui reformulent la théorie de l'équilibre.

LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE VARIGNON :

Varignon considère un parallélogramme MF_1FF_2 , un point O non situé en M et il montre que l'aire du triangle MOF est égale à la somme algébrique des aires des triangles MOF_1 et MOF_2 et la démonstration précisera ce que « somme algébrique » veut dire.

Pour démontrer cette propriété, remarquons que les trois triangles ont un côté en commun, OM . Donc, si nous traçons la droite perpendiculaire à OM en M et que l'on projette sur cette droite les sommets F , F_1 et F_2 des triangles, les pieds des projections correspondant, f , f_1 et f_2 , sont tels que les longueurs Mf , Mf_1 et Mf_2 ont les mêmes valeurs que les hauteurs issus des sommets opposés à OM dans chacun des triangles.

En d'autres termes les aires des triangles MOF , MOF_1 et MOF_2 sont respectivement égales à celles des triangles MOf , MOf_1 et MOf_2 , et donc

$$\text{aire}(MOF) = \text{aire}(MOf)$$

$$\text{aire}(MOF_1) = \text{aire}(MOf_1)$$

$$\text{aire}(MOF_2) = \text{aire}(MOf_2)$$

• Supposons que O soit à l'intérieur de l'angle défini par les demi-droites MF_1 et MF_2 (dessin de gauche de la figure 12). Nous avons

$$\text{aire}(MOF) = \text{aire}(MOf) = \text{aire}(MOf_1) - \text{aire}(Of f_1)$$

Par ailleurs

$$\text{aire}(Of f_1) = \text{aire}(MOf_2)$$

En effet ces deux triangles ont même hauteur et $f_2M = ff_1$ puisqu'ils sont respectivement projection des côtés parallèles F_2M et FF_1 du parallélogramme. Ils ont donc même aire. En définitive,

$$\text{aire}(MOF) = \text{aire}(MOF_1) - \text{aire}(OFF_2)$$

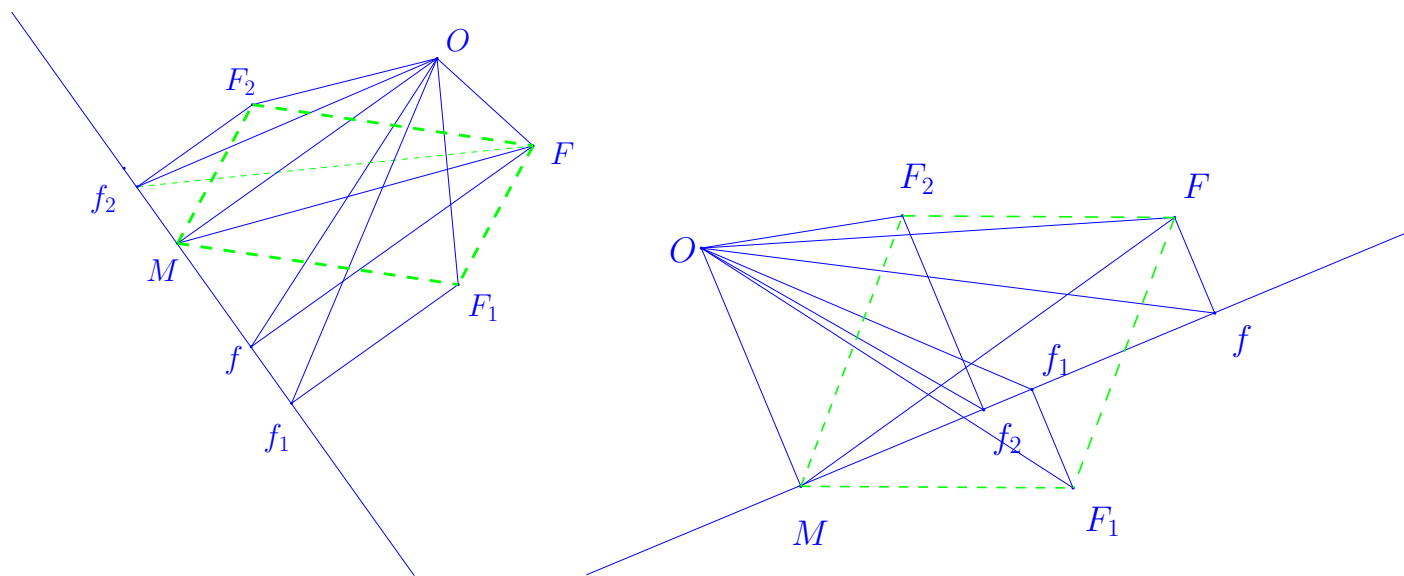


Figure 12. Les deux cas de base de la démonstration de la propriété de Varignon. Dans la figure de gauche, le point O est situé à l'« intérieur » de l'angle $\widehat{F_1MF_2}$; dans la figure de droite, il est situé à l'« extérieur ». La démonstration précisera la signification des mots « intérieur » et « extérieur ».

• De même, si O est à l'extérieur de l'angle défini par MF_1 et MF_2 (dessin de droite de la figure 12), nous avons :

$$\text{aire}(MOF) = \text{aire}(MOf) = \text{aire}(MOF_2) + \text{aire}(Of_1f)$$

Or,

$$\text{aire}(Of_1f) = \text{aire}(OMf_2) = \text{aire}(OF_2M)$$

puisque Mf_2 et f_1f sont les projections des côtés parallèles MF_1 et F_1F_2 du parallélogramme.

Ce qui achève de démontrer la propriété fondamentale de Varignon.

CONSÉQUENCES ALGÈBRIQUES DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE VARIGNON :

Tout cela n'est que mathématiques, géométrie pure ; continuons encore un peu en nous posant la question : « Comment peut-on savoir automatiquement s'il faut additionner ou retrancher les aires des triangles ? ». D'après la démonstration, il faut savoir où se trouve le point O par rapport aux droites supportant les vecteurs $\overrightarrow{MF_1}$ et $\overrightarrow{MF_2}$, et la réponse à cette question est donnée comme conséquence d'un choix d'une orientation du plan, donc de l'espace.

Procédons par étapes et considérons d'abord dans le plan la figure formée par un point O et un vecteur \overrightarrow{MF} (figure 13). Nous faisons apparaître un triangle OMF que nous désignons par ses sommets pris dans cet ordre : d'abord le point O , puis l'origine du vecteur \overrightarrow{MF} , et enfin son extrémité.

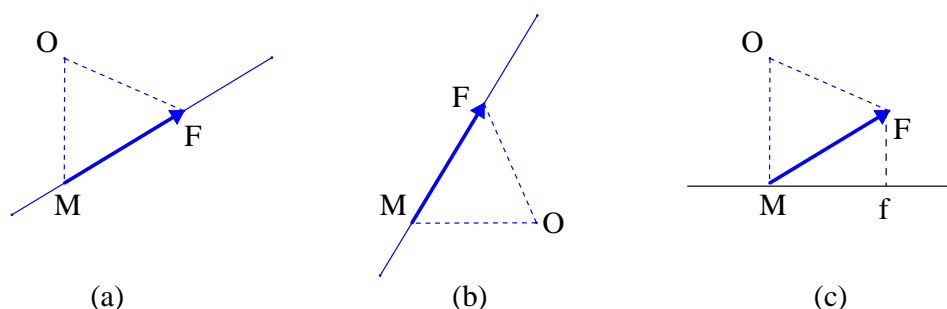


Figure 13. Les sommets du triangle OMF sont décrits dans le sens trigonométrique (figure (a)) lorsque O est au dessus de l'axe MF , dans le sens des aiguilles d'une montre (figure (b)) lorsqu'il est au dessous. Les triangles OMF et OMf de la figure (c) sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils ont même aire. Si nous convenons d'associer le signe $+$ à l'aire du triangle OMF de la figure (a), l'aire du triangle OMF de la figure (b) sera négative ; avec cette convention, les aires des triangles OMF et OMf de la figure (c) seront égales et de même signe.

Lorsque nous parlons du triangle OMF , ses sommets sont décrits dans le sens trigonométrique lorsque O est situé « au dessus » de l'axe du vecteur (figure 13 (a)), et ils sont décrits dans le sens inverse, celui des aiguilles d'une montre, lorsque O est « au dessous » du même axe (figure 13 (b)).

Rien n'est changé si, au lieu de parler de l'ordre dans lequel sont décrits les sommets, nous partons du vecteur \overrightarrow{OM} d'origine O et d'extrémité M , puis que nous déplaçons ce vecteur sur son axe jusque son origine coïncide avec M et que nous considérons enfin une rotation de centre M qui amène l'axe du nouveau vecteur \overrightarrow{OM} sur l'axe du vecteur

\overrightarrow{MF} . Si nous faisons intervenir l'axe de rotation (qui est perpendiculaire au plan), nous aboutissons à la notion de trièdre direct.

Il est donc possible de caractériser la position du point O par rapport à l'axe du vecteur, qui coupe le plan en deux, en utilisant la façon dont on décrit les sommets du triangle OMF : O est « au dessus » de l'axe si les sommets O , M et F sont décrits dans le sens trigonométrique, « en dessous » dans le cas contraire. Notons également que cette caractérisation est indépendante de la position du vecteur sur le support choisi.

Nous pouvons même intégrer ce fait dans la valeur de l'aire de ce triangle puisque ce sont les valeurs des aires qui interviennent dans le théorème de Varignon que nous cherchons à interpréter : puisque l'aire du triangle s'annule lorsque O se trouve sur l'axe, il suffit de convenir que cette aire est positive d'un côté et négative de l'autre et nous conviendrons désormais de dire que si les sommets du triangle OMF sont décrits dans le sens trigonométrique, la valeur de son aire sera positive ; elle sera donc négative s'ils sont décrits dans l'autre sens¹⁶.

FORMULATION ALGÈBRE DU THÉORÈME DE VARIGNON ;

Nous constatons donc que si nous voulons pouvoir faire des calculs explicites en utilisant la propriété découverte par Varignon, nous sommes conduits à introduire une convention d'orientation dans le plan, ce qui, *de facto* introduit également la notion d'angle orienté.

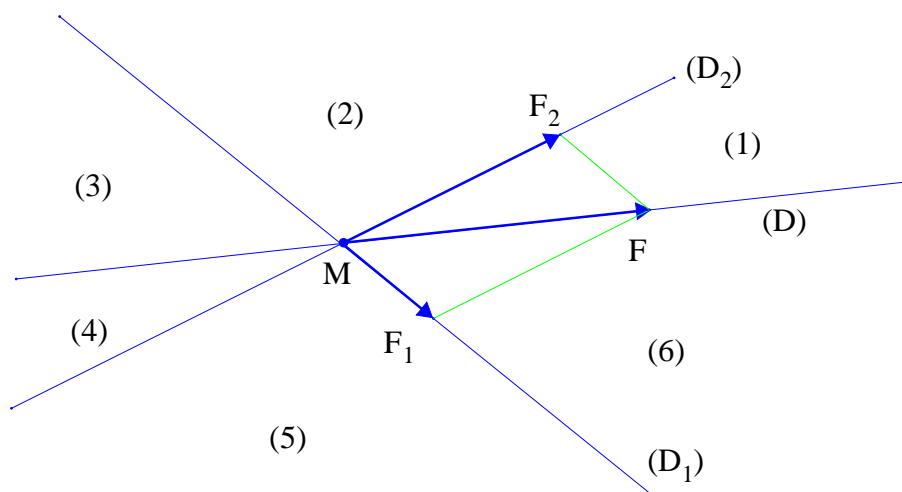


Figure 14. Les droites supportant les vecteurs $\overrightarrow{MF_1}$, $\overrightarrow{MF_2}$ et \overrightarrow{MF} passent toutes par M et découpent le plan en six régions..

Effectuons un pas de plus dans cette formulation et remarquons que (figure 13 (c)), si nous faisons apparaître la droite orthogonale en O à OM et la projection f de F sur cette droite, les aires algébriques des triangles OMF et OMf sont égales¹⁷ (les deux triangles ont un côté commun OM , le segment Mf est égal à la longueur de la

¹⁶ Ce choix est évidemment arbitraire, nous aurions aussi bien pu choisir l'autre volet de l'alternative, mais il est inutile de se singulariser en ne faisant pas le choix de tout le monde.

¹⁷ Deux figures ayant même aire sont dites « équivalentes ». Nous étendrons cette définition aux aires algébriques.

hauteur de chaque triangle, ce qui assure l'égalité des aires en valeur absolue) ; de plus, le point F est nécessairement choisi d'un côté de la droite OM , sa projection f sur la perpendiculaire à cette droite est donc du même côté que F par rapport à OM , et OMF et OMf sont alors décrits dans le même sens.

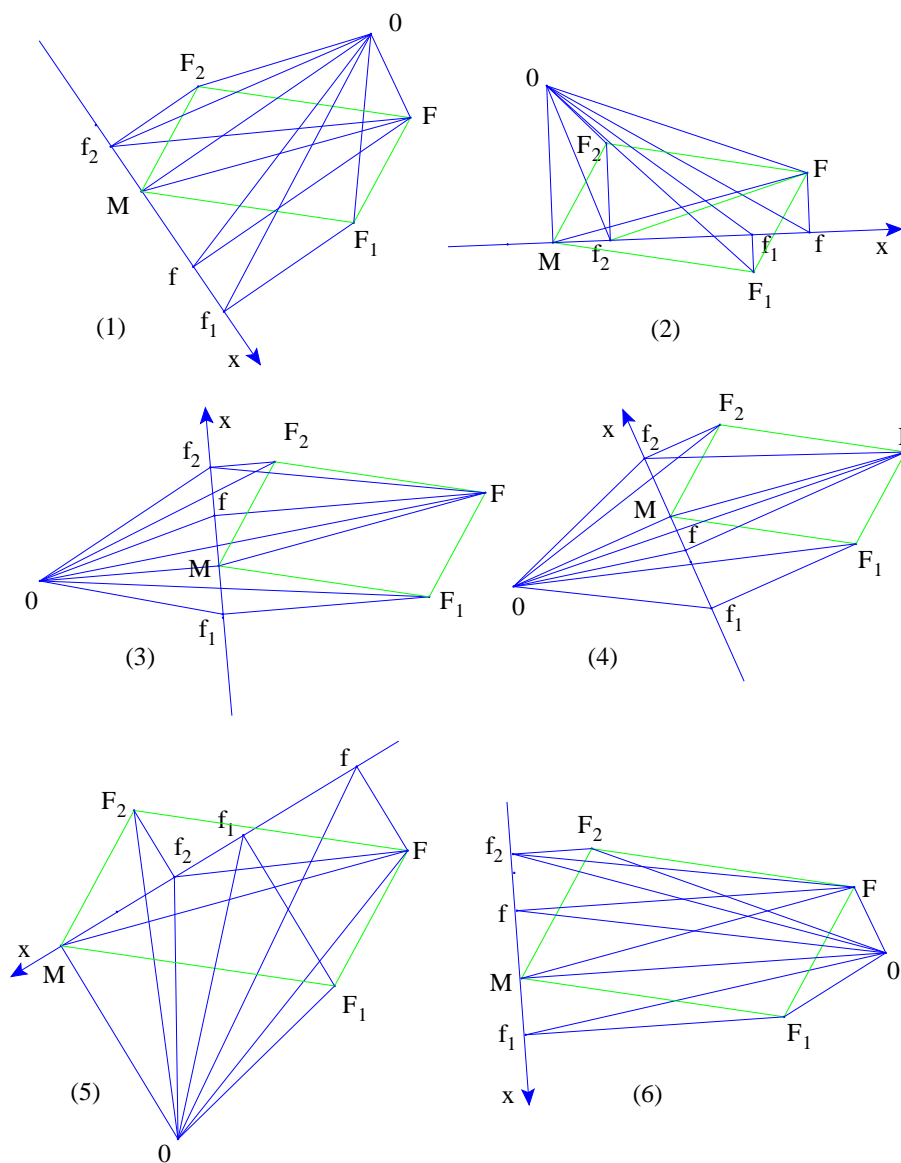


Figure 15. Les différents cas géométriques pouvant survenir lors de la démonstration de la propriété de Varignon.

Appliquons ces résultats au théorème de Varignon. les vecteurs $\overrightarrow{MF_1}$, $\overrightarrow{MF_2}$ et leur composé \overrightarrow{MF} déterminent trois droites (D_1) , (D_2) et (D) qui, à leur tour décomposent le plan en six régions décrites sur la figure 14 et dans lesquelles peut se trouver le point O . Les configurations correspondant aux triangles associés sont présentées sur la figure 15. Les signes des aires de ces triangles dans chaque cas sont regroupés dans le tableau qui suit. Dans ce même tableau, nous avons ajouté les signes des valeurs algébriques des

distances de M aux différentes projections des extrémités des vecteurs¹⁸.

Nous pouvons alors constater que ces signes sont directement reliés à ceux des valeurs algébriques des triangles correspondant. Avec ces conventions, nous pouvons écrire sous forme algébrique le *théorème de Varignon* :

Soit un parallélogramme MF_1FF_2 et un point O non situé en M ; les aires algébriques des triangles OMF , OMF_1 et OMF_2 sont liées par la relation :

$$(3) \quad \text{aire}(OMF_1) + \text{aire}(OMF_2) = \text{aire}(OMF)$$

région de O	aire OMF_1	aire OMf_2	aire OMF	$\overline{Mf_1}$	$\overline{Mf_2}$	\overline{Mf}
(1)	+	-	+	+	-	+
(2)	+	+	+	+	+	+
(3)	-	+	+	-	+	+
(4)	-	+	-	-	+	-
(5)	-	-	-	-	-	-
(6)	+	-	-	+	-	-

Tableau 1. Signes des aires des différents triangles intervenant dans le théorème de Varignon et signes des valeurs algébriques des distances à M des projections des extrémités des vecteurs sur la perpendiculaire en M à OM . Cette droite est orientée de sorte que $(Mx, MO) = +\pi/2$.

LA NOTION DE PRODUIT VECTORIEL, SES PROPRIÉTÉS ;

La relation algébrique :

$$\text{aire}(OMF_1) + \text{aire}(OMF_2) = \text{aire}(OMF)$$

peut se généraliser de la façon suivante.

Chaque nombre algébrique représentant une aire est obtenu à partir de deux vecteurs (\overrightarrow{OM} , par exemple, et \overrightarrow{MF}) et d'une "règle du jeu" permettant de calculer la valeur algébrique de cette aire. Le lecteur se convaincra aisément que cette règle, le calcul de la aire d'un parallélogramme, peut s'exprimer par :

$$\text{aire}(OMF) = OM \times MF \times \sin(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MF})$$

Il est possible de faire un pas de plus dans l'interprétation géométrique de ces expressions en faisant intervenir l'axe de la rotation qui amène le support du premier vecteur sur

¹⁸ Une fois le plan orienté, il est toujours possible de choisir un sens sur une droite quelconque ; il est évidemment arbitraire. Ici, dans chacune des figures, le sens positif sur Mf a été choisi de façon que l'angle $(Mx, MO) = +\pi/2$.

le second et en définissant sur cet axe un vecteur d'un nouveau type dont le module est la valeur absolue de l'aire et dont le sens est celui qui rend direct le trièdre (premier vecteur, second vecteur, nouveau type de vecteur). Ce « vecteur », que je qualifie « de surface » est habituellement noté par les mathématiciens et les physiciens¹⁹ :

premier vecteur \wedge second vecteur

notation qui rappelle sa définition. La loi de composition ainsi définie s'appelle le « produit vectoriel » des deux vecteurs.

Il est facile de vérifier que si, dans la définition, on permute les vecteurs les vecteurs \vec{A} et \vec{B} le résultat obtenu sera changé de signe :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} \quad \text{et aussi} \quad (\lambda \vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (\lambda \vec{B}) = \lambda(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

Cette notation permet de récrire la propriété de Varignon sous la forme²⁰ suivante :

Soient \vec{MF} , \vec{MF}_1 , \vec{MF}_2 , trois vecteurs issus d'un même point M . Si ces vecteurs sont liés par la relation

$$\vec{MF} = \vec{MF}_1 + \vec{MF}_2$$

alors

$$(4) \quad \vec{OM} \wedge (\vec{MF}_1 + \vec{MF}_2) = \vec{OM} \wedge \vec{MF}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{MF}_2$$

Ces propriétés, ajoutées à l'antisymétrie, montrent que le produit vectoriel est bilinéaire ou que ce produit est distributif par rapport à l'addition des vecteurs.

Il est maintenant aisé d'obtenir une représentation analytique du produit vectoriel de deux vecteurs. Supposons l'espace de la géométrie repéré par une base de vecteurs orthonormés $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formant un trièdre direct.

L'application des définitions et propriétés ci-dessus à cette base conduit aux relations

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{aligned}$$

Si donc, dans cette base, nous posons :

$$\vec{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

¹⁹ J'ai souligné « vecteur d'un nouveau type » car s'il est normal d'appeler cet être mathématique un vecteur, cette appellation soulève des difficultés que nous ne ferons qu'esquisser.

De même, la qualification « de surface » n'est là que pour montrer que l'être mathématique ainsi défini n'est pas de même nature que les vecteurs géométriques qui le composent. Par définition, il est lié à la notion de surface alors que le vecteur « traditionnel » est lié à la notion de longueur. C'est aussi un clin d'oeil à J.C. Maxwell qui, dans l'introduction de son traité sur l'électricité et le magnétisme, esquisse une classification des vecteurs en Physique.

²⁰ Attention, la relation entre les aires est une relation entre nombres algébriques alors que celle-ci relie les « nouveaux types de vecteurs ».

le produit vectoriel de \vec{A} et \vec{B} s'écrit

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$$

soit, en appliquant le théorème de Varignon

$$(5) \quad \vec{A} \wedge \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

ce qui fournit les composantes du produit vectoriel dans la base choisie.

APPLICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS À L'ÉTUDE DES ÉQUILIBRES.

Ce qui suit est fondamental.

- L'étude des plans inclinés nous a montré que la notion de force pouvait être complétée par une notion de décomposition qui, dans des cas bien précis, s'exprime de manière analogue à celle de la décomposition des vecteurs de la géométrie.

Cette décomposition, vue dans l'autre sens, s'appelle "addition", et Varignon a établi que, pour les vecteurs de la géométrie, elle était indissolublement liée à une notion de surface orientée dans le plan des vecteurs. Il en résulte une nouvelle opération, le produit vectoriel et des liens entre cette opération et l'addition des vecteurs de la géométrie.

Si nous voulons transposer ces propriétés à la notion de force, et c'est ce que nous ferons, elles doivent subir « le filtre des forces », c'est-à-dire être adaptées aux contraintes créées par la définition d'une force : deux forces ne peuvent s'additionner que si elles ont même point d'application ; cette addition se fait en un point et dépend des conditions définies dans le problème.

- Pour considérer cette question, revenons à la théorie du levier et reprenons l'expérience de la figure 4-c schématisée en 4-d.

Remplaçons sur le schéma les représentations des corps qui interviennent par leurs poids. Cela signifie que l'on remplace ces corps à l'endroit où ils se trouvent par un autre corps ponctuel de même poids. Sur le schéma, ce dernier est représenté par une force dont le module a pour valeur l'intensité du poids. D'après les propriétés des balances ou du levier d'Archimède, cette force peut en réalité être placée verticalement n'importe où sur le support du fil qui suspend le corps remplacé sans modifier l'équilibre.

Sur le schéma obtenu (figure 16-c), nous avons supprimé pour des raisons de clarté le corps qui servait d'armature à la balance, qui ressemble maintenant à une balance romaine ; l'armature $F_2 F_1$ est donc supposée sans poids, mais rigide.

Appliquée à ce schéma, la relation fondamentale des leviers (1) s'écrit

$$P_1 \times OF_1 = P_2 \times OF_2$$

et s'interprète, ce qui est toujours possible puisque P_1 et P_2 sont les modules des forces \vec{P}_1 et \vec{P}_2 , comme l'égalité entre les aires des triangles (O, \vec{P}_1) et (O, \vec{P}_2) .

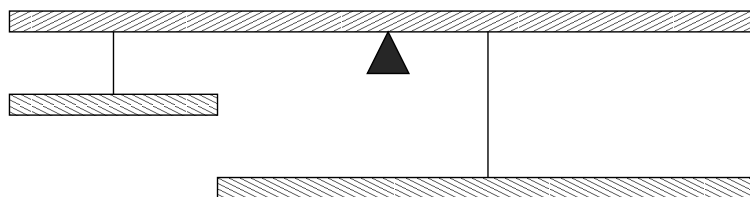
En tenant compte des définitions algébriques des aires introduites plus haut, nous pouvons vérifier que cette égalité est encore valable pour les aires algébriques. Comme ces

dernières correspondent au “pseudo-module” d’un produit vectoriel, il est possible de réécrire la relation fondamentale des leviers sous la forme :

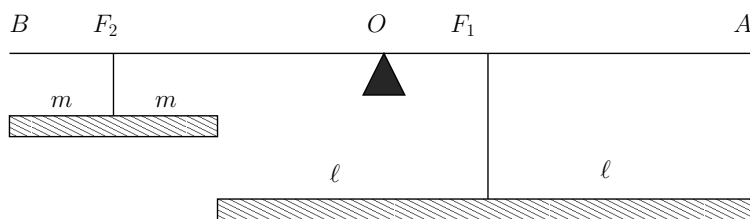
$$\overrightarrow{OF_1} \wedge \overrightarrow{P_1} = -\overrightarrow{OF_2} \wedge \overrightarrow{P_2}$$

soit, du fait des propriétés du produit vectoriel :

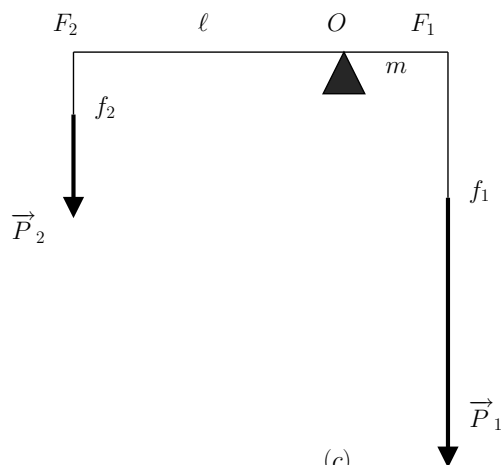
(6)
$$\overrightarrow{Of_1} \wedge \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{Of_2} \wedge \overrightarrow{P_2} = 0$$



(a)



(b)



(c)

Figure 16. Introduction de la notion de moment. Les figures (a) et (b) reproduisent pour plus de clarté les figures 4 (c) et 4 (d). Les forces \vec{P}_1 et \vec{P}_2 ont pour modules respectifs les poids P_1 et P_2 et elles sont placées en n’importe quel point de la verticale des points F_1 et F_2 .

La nouvelle « bête » qui apparaît dans la formule ci-dessus

$$\overrightarrow{OF} \wedge \vec{P}$$

est le produit vectoriel d'un vecteur géométrique par une force²¹ et l'égalité (6) n'est plus une égalité entre nombres réels, mais une égalité entre éléments de ce nouveau type dont il faudra tenir compte dans les interprétations géométriques ultérieures. Les physiciens et les mécaniciens désignent ce nouveau type sous le nom de « moment de la force \vec{F} par rapport au point O », ce qui permet d'énoncer la relation fondamentale des leviers sous la forme :

*Un levier est en équilibre si les moments associés à chacun de ses bras et calculés par rapport à son centre d'équilibre sont égaux*²².

• La notion de moment ne permet pas d'obtenir une nouvelle expression de la relation fondamentale des plans inclinés (2). Pour le comprendre, reproduisons ci-après dans la figure 17 le schéma de la figure 7-c.

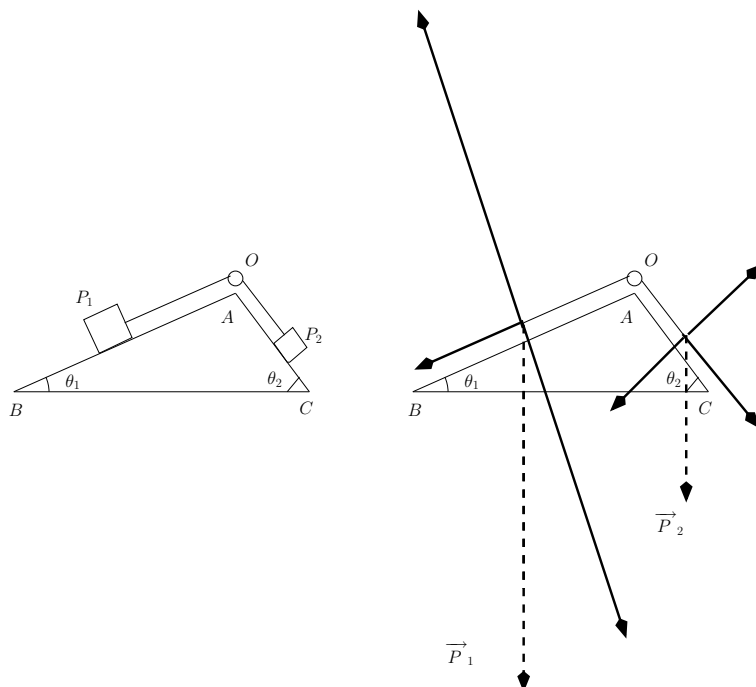


Figure 17. Cette figure reprend la figure 7-c (à gauche) et fait apparaître les forces (à droite). Les poids sont décomposés en une réaction sur le plan et une force tirant dans le prolongement du fil. Les réactions s'équilibrent et les forces restantes sont égales en module.

Comme nous l'avons vu, du fait des plans inclinés, les poids se décomposent chacun en une force qui s'oppose à la réaction du plan et une autre qui tire dans le prolongement du fil. Ce dernier passe par l'axe O de la poulie.

²¹ et non par un autre vecteur géométrique comme c'est le cas dans la relation de Varignon.

²² On notera que si le point O de la propriété de Varignon (4) pouvait être choisi n'importe où dans le plan, la propriété des moments est énoncée par rapport au centre d'équilibre.

Si nous calculons maintenant les moments de toutes ces forces par rapport à O , les moments des forces correspondant aux réactions s'opposent deux à deux et ceux correspondant aux forces tirant sur le fil sont nuls puisque l'angle formé par le fil et chaque force est nul. Au total, rien ne contribue. La relation fondamentale des plans inclinés traduit simplement le fait que la poulie transmet intégralement les forces en module (figure 9 et figure 17), autrement dit que la poulie ne fait que changer la direction de la force.

- L'addition des forces concourantes en un point permet d'envisager le problème de la combinaison des forces parallèles.

Considérons une situation, pour l'instant imaginaire, où deux forces \vec{F} et \vec{F}' parallèles agissent chacune à l'extrémité d'une tige sans poids AB . Nous montrerons par la suite que le raisonnement qui suit est indépendant de l'orientation de ces forces, mais, dans un premier temps, pour plus de commodité, nous les supposons verticales et la tige horizontale (figure 18).

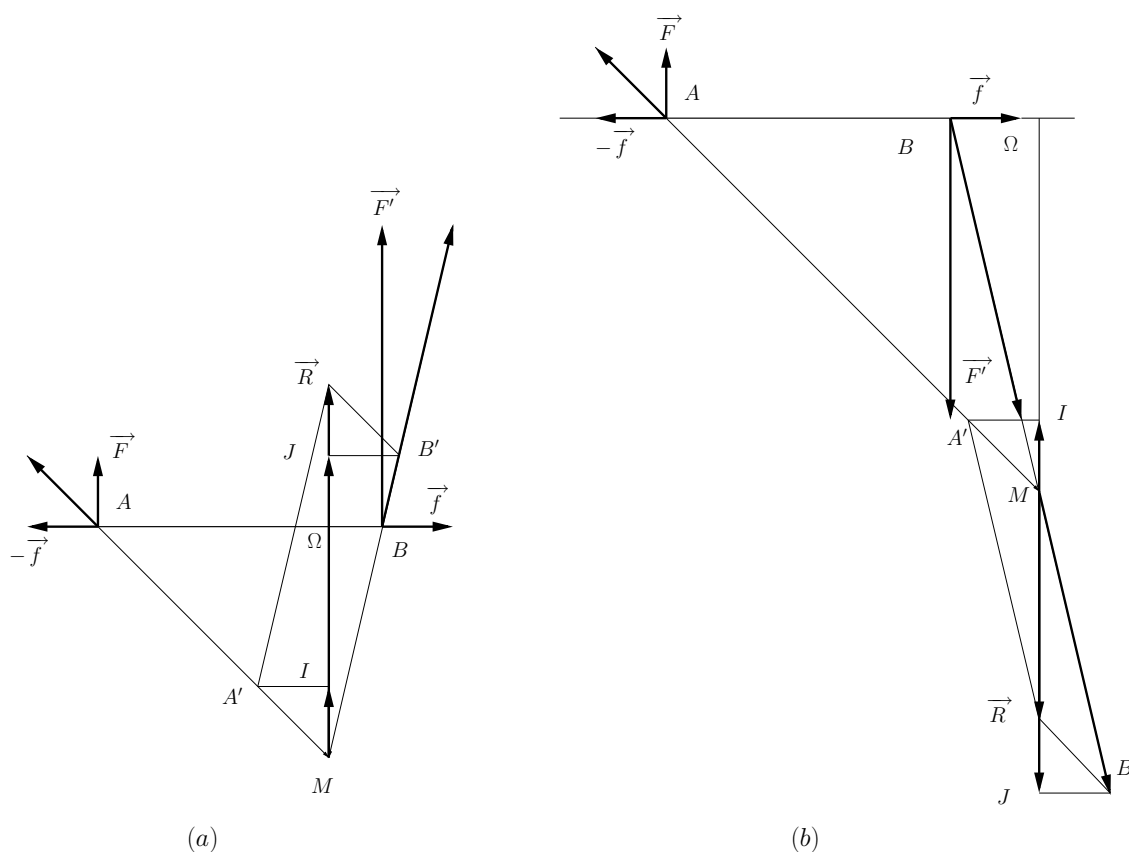


Figure 18. Le cas des forces parallèles, de même sens (figure (a)), de sens contraires (figure (b)).

Appliquons à ce système deux forces horizontales et opposées \vec{f} et $-\vec{f}$ aux extrémités de la tige. Elles s'annulent mutuellement, mais rien n'empêche, théoriquement, de les composer avec les forces \vec{F} et \vec{F}' qui agissent aux mêmes points. Les forces résultantes ne sont plus parallèles, leurs axes se coupent en un point M et nous pouvons faire glisser

leurs origines jusqu'en M où elles peuvent être remplacées par leur résultante \vec{R} . Cette dernière est verticale, dirigée dans le même sens que la force initiale qui a la plus grande intensité et dont le module vaut la somme (figure 18-a) ou la différence (figure 18-b) des modules des forces initiales. L'axe de la résultante \vec{R} coupe l'axe de la tige AB en Ω . Au cours des manipulations précédentes, les forces \vec{f} et $-\vec{f}$ se sont éliminées mais il est aisé de vérifier que si ces forces varient, le point Ω reste fixe et que le point M se déplace sur la perpendiculaire en Ω à AB .

En effet, choisissons un sens positif pour les directions horizontale et verticale et convenons de mettre une barre sur un segment pour désigner sa valeur algébrique.

Les triangles MIA' et $M\Omega A$ sont semblables et fournissent donc la relation :

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{\Omega A}} \quad \text{soit encore} \quad \frac{\overline{F}}{\overline{M\Omega}} = -\frac{\overline{f}}{\overline{\Omega A}}$$

où \overline{F} et \overline{f} sont les valeurs algébriques des vecteurs correspondants compte tenu des sens choisis pour les directions verticale et horizontale.

Il en est de même pour les triangles MJB' et $M\Omega B$ qui, avec les mêmes conventions donnent :

$$\frac{\overline{MJ}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{JB'}}{\overline{\Omega B}} \quad \text{soit encore} \quad \frac{\overline{F'}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{f}}{\overline{\Omega B}}$$

De ces deux relations, nous déduisons :

$$(7) \quad \frac{\overline{F'}}{\overline{F}} = -\frac{\overline{\Omega A}}{\overline{\Omega B}} \quad \text{et donc} \quad \frac{\overline{F'}}{\overline{\Omega A}} = -\frac{\overline{F}}{\overline{\Omega B}} = \frac{\overline{F} + \overline{F'}}{\overline{AB}}$$

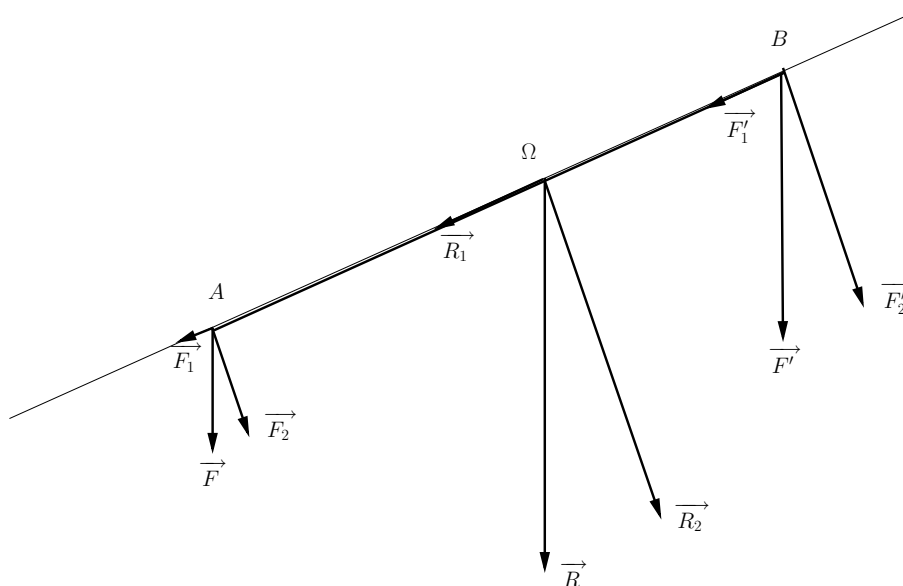


Figure 19. Les forces parallèles, le cas général. Les forces \vec{F} et \vec{F}' se décomposent le long et perpendiculairement à la tige AB . Les forces perpendiculaires définissent un point Ω et une résultante par application du résultat précédent. Il suffit ensuite de composer cette résultante en Ω avec la somme des forces parallèles pour obtenir la résultante des forces initiales.

Le point Ω se trouve donc entre A et B si les forces \vec{F} et \vec{F}' sont de même sens ; il sera à l'extérieur du segment AB si elles sont de sens opposés. Sa position est, de plus, indépendante de f , comme nous l'avions annoncé plus haut.

Nous conviendrons de rapporter la résultante \vec{R} ainsi obtenue en Ω .

Que se passe-t-il si maintenant, la tige n'est plus horizontale ?

Le cas est représenté sur la figure (19) pour des forces \vec{F} et \vec{F}' de même sens qui se décomposent chacune en deux forces, l'une le long de la tige AB et l'autre perpendiculaire cette tige. Avec les forces \vec{F}_2 et \vec{F}'_2 , nous nous trouvons dans une configuration analogue au cas qui vient d'être étudié. Elles définissent un point Ω sur AB par le rapport algébrique de leurs valeurs algébrique et une résultante \vec{R}_2 correspondant à la somme de leurs vecteurs géométriques. Si en Ω , nous plaçons la somme \vec{R}_1 des forces \vec{F}_1 et \vec{F}'_1 , nous pouvons construire vecteur \vec{R} somme des vecteurs \vec{R}_1 et \vec{R}_2 . Les triangles, $A, \vec{F}, \vec{F}_2, B, \vec{F}', \vec{F}'_2$ et $\Omega, \vec{R}, \vec{R}_2$ formés à partir des différents vecteurs sont semblables. Il en résulte que :

- le support de \vec{R} est parallèle aux supports de \vec{F} et \vec{F}' ;
- le rapport des valeurs algébriques des vecteurs \vec{F} et \vec{F}' est égal à celui des vecteurs \vec{F}_2 et \vec{F}'_2 . Ils définissent donc le même point Ω sur AB .

Le \vec{R} au point Ω définit donc bien la résultante des forces \vec{F} et \vec{F}' .

• Il est évident, par construction, que la résultante \vec{R} est purement artificielle, disons mathématique, et qu'une relation du type

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}'$$

n'a aucun sens physique. En géométrie, c'est une triviale qui correspond à la définition de l'addition des vecteurs. En réalité, tout ce que nous avons fait ci-dessus revient à définir un point, le point Ω . Et nous pouvons convenir qu'en ce point parfaitement défini, nous avons construit un vecteur comme une somme des vecteurs géométriques associés aux forces \vec{F} et \vec{F}' et que nous lui avons associé une force.

Nous pouvons cependant calculer le moment de chacune de ces forces par rapport à un point quelconque, O . Cela dit, comme ces moments ne dépendent que de la distance et de la position de O par rapport à chacun des axes des forces, il est plus pratique de choisir O sur le support de AB . Nous pouvons écrire, en faisant intervenir les points A et B et en utilisant les mêmes conventions d'orientation sur les axes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{R} &= \overrightarrow{O\Omega} \wedge (\vec{F} + \vec{F}') = \overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{F}' \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Omega}) \wedge \vec{F} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Omega}) \wedge \vec{F}' \\ &= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}' + \overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{B\Omega} \wedge \vec{F}' \end{aligned}$$

La somme des deux derniers termes a une contribution nulle d'après (7). Il reste donc :

$$(8) \quad \overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}'$$

où \vec{R} est le vecteur, somme des vecteurs \vec{F} et \vec{F}' , lié en Ω défini par (7).

Ce résultat, très important, est le pendant du théorème de Varignon pour des forces parallèles, plus exactement pour des vecteurs liés et c'est de sa justification pour des forces parallèles dont nous allons parler maintenant.

• Pour se convaincre de la réalité possible d'une force associée à \vec{R} , il faut la faire apparaître, ce qui est toujours possible en plaçant notre tige et ses forces sur un point donné passant par l'axe de la résultante. Il y a au moins deux façons simple de le faire : soit en déposant le système sur un support passant par Ω , soit en le suspendant à un fil passant par Ω . Un exemple dans le cas des forces parallèles est illustré par la figure 20. Que va-t-il se passer si nous tentons l'une ou l'autre de ces expériences ? Le théorème de Varignon (8) pour les forces parallèles propose un début de réponse. Si nous l'écrivons en choisissant comme origine Ω , il se simplifie en :

$$0 = \vec{\Omega A} \wedge \vec{F} + \vec{\Omega B} \wedge \vec{F}'$$

qui n'est autre que la relation fondamentale des leviers (6). Ce n'est nullement étonnant car la figure 20-a n'est fondamentalement pas différente de celle de la présentation des leviers (figures 4-c ou 4-d).

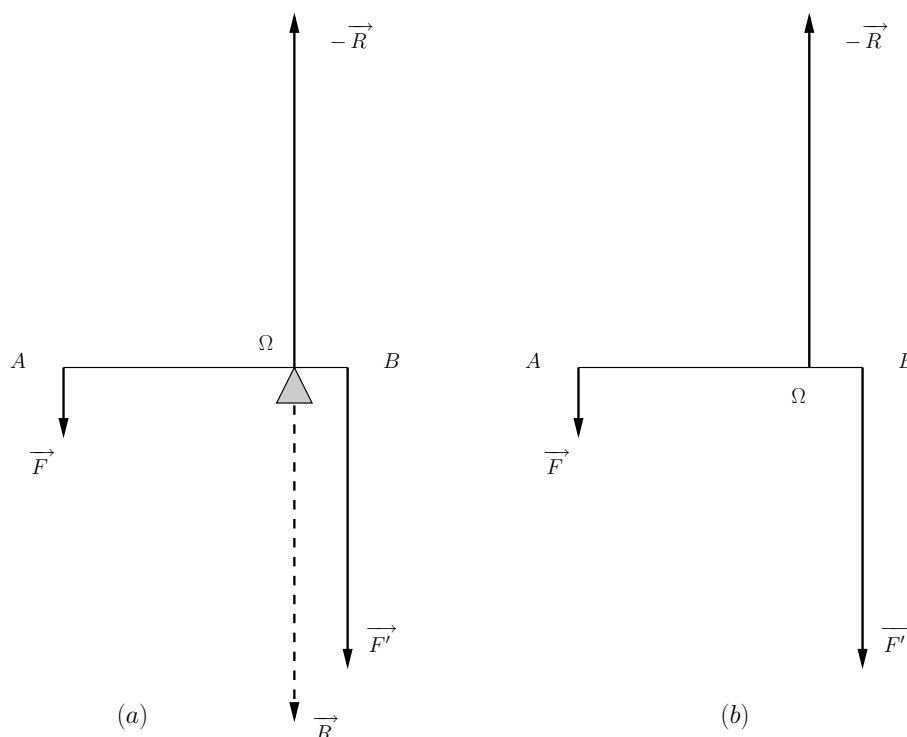


Figure 20. Mise en évidence de la force résultante. Dans le cas (a), le point Ω du système est posé sur le sommet du triangle servant de support ; la résultante (en tirets) s'oppose à la force de réaction du support $-\vec{F}$. dans le cas (b), c'est un fil qui est attaché en Ω et qui soutient le système. Dans les deux cas, le système est en équilibre.

L'interprétation de l'expérience s'en déduit : le levier appuyé sur son axe avec une force \vec{R} équivalente aux forces \vec{F} et \vec{F}' et qui est construite de la manière que nous

venons de voir. Le dit appui réagit avec une force opposée selon le principe de l'action et de la réaction. Leur action s'annule. L'intérêt de l'expérience schématisée en 20-b est qu'elle montre la direction de la force résultante. L'action des deux force doit aussi s'annuler. Autrement dit, dans une expérience comme dans l'autre, rien ne doit bouger. Et c'est bien ce qui se passe.

Remarquons, une fois de plus, que les raisonnements ci-dessus ne sont pas une démonstration de l'existence d'une résultante de forces parallèles mais une vérification de la cohérence des hypothèses que nous avons faites.

• Ce n'est pas tout. Le théorème de Varignon pour les forces parallèles introduit la notion de couple. Considérons, en effet, une expérience du type de la figure 18-b (forces parallèles, mais de sens contraire) et regardons ce qui se passe si nous faisons, par exemple, tendre la force \vec{F}' vers $-\vec{F}$. les formules (7) s'écrivant

$$\overline{\Omega A} = \overline{AB} \frac{\overline{F'}}{\overline{F} + \overline{F'}} \quad \text{et} \quad \overline{\Omega B} = -\overline{AB} \frac{\overline{F}}{\overline{F} + \overline{F'}}$$

montrent alors que le point Ω s'éloigne à l'infini lorsque $\overline{F} + \overline{F'}$ tend vers zéro

La résultante \vec{R} . tendant, elle aussi, vers zéro, le théorème de Varignon pour les forces parallèles (8)

$$\overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}'$$

montre quant à lui que le produit vectoriel $\overrightarrow{O\Omega} \wedge \vec{R}$ tend vers : $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$

La quantité physique associée à un système de deux forces parallèles, de même module, mais opposées s'appelle un couple. La résultante associée à ce couple est nulle, mais son moment est constant.

Note importante.

Dans cette partie, nous avons essayé de dégager le concept de force de deux équilibres particuliers, celui du levier et celui des plans inclinés. Nous avons vu que ce concept était intimement associé à un autre concept, celui de moment, nécessaire pour justifier les propriétés des forces.

Nous avons introduit, et tenté de les justifier, toutes les bases des définitions mathématiques associées aux forces.

Nous avons vu qu'une force pouvait être représentée par un vecteur géométrique se déplaçant sur une droite déterminée de l'espace, dite support de la force. La droite et le vecteur sont, bien sûr, parallèles.

Par définition, ce vecteur peut être placé n'importe où sur la droite, ce qui revient à introduire sur l'ensemble des vecteurs de la géométrie la relation d'équivalence :

Deux vecteurs seront dits équipollents

- s'ils sont parallèles, de même module et de même sens ;
- s'ils ont le même support.

Une force correspond donc à l'ensemble de tous les vecteurs équipollents au sens ci-dessus à un même vecteur. Cet ensemble s'appelle *glisseur* ou *vecteur glissant*.

Un glisseur, donc une force, dépend de six paramètres.

Puisque le vecteur et son support sont parallèles, il est équivalent de dire que le glisseur est défini par un vecteur géométrique et un point sur le support. On montre alors aisément que le moment d'un glisseur par rapport à un point quelconque est indépendant du point choisi sur le support pour définir le glisseur.

Nous avons également vu que deux forces ne pouvaient s'additionner que si leurs supports étaient concourants ou parallèles, ce qui fait que les forces, comme les glisseurs, ne peuvent être des éléments d'un espace vectoriel selon cette addition.

Par contre, comme il existe des forces de supports non concourants, on est amené à considérer de tels ensembles. On appelle alors *torseur* un ensemble constitué par un nombre fini de glisseurs et on montre qu'il est possible de réduire l'étude d'un tel système à celle de quelques propriétés simples. Comme les applications des torseurs sont surtout liées à la Mécanique du solide ou aux milieux continus, nous n'en dirons pas plus ici sur ce sujet²³.

Nous admettrons désormais comme connues toutes ces propriétés et leurs conséquences.

Dans la partie qui suit, nous postulerons que ces concepts sont applicables à la notion de mouvement d'une particule et verrons comment ils interviennent dans la notion de trajectoire de cette particule.

²³ Le lecteur intéressé pourra se tourner vers les ouvrages de Mécanique, comme, par exemple, celui de H. Cabannes, *Cours de Mécanique générale*, Dunod, 1962.

Forces et Mouvement

Cadre de travail et démarche.

Nous voulons maintenant étendre la notion de force que nous venons de définir à l'équilibre à propos de l'étude des équilibres et la relier à l'étude du mouvement.

Dire qu'il y a mouvement, c'est, pour l'observateur, dire que quelque chose se déplace dans son champ visuel ; ce qui suppose toute une série d'hypothèses et tout un vocabulaire que nous allons expliciter.

Nous reprenons donc les hypothèses qui nous ont servi à définir les forces : un observateur dispose, dans un espace euclidien à trois dimensions, de règles lui permettant de mesurer des longueurs dans l'espace. Il dispose aussi, ce qui est nouveau, d'horloges permettant de mesurer le temps.

L'observateur est donc capable de repérer la trajectoire d'un point matériel²⁴, parfois appelé mobile, qui se déplace devant ses yeux, par les positions successives qu'il observe à chaque instant en les reportant dans le modèle mathématique qu'il s'est défini. Nous utiliserons le mot « trajectoire » pour parler du déplacement physique du point matériel et le mot « courbe » pour parler de la représentation mathématique de l'ensemble des points géométriques par lesquels est passé le point matériel.

La trajectoire d'un point M est donc définie par l'ensemble de ses coordonnées dépendant du temps, c'est-à-dire par trois fonctions du temps dont nous précisons les propriétés mathématiques plus loin :

$$(9) \quad M(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

alors qu'une courbe est un concept purement géométrique où le temps n'intervient pas. Les notions de « trajectoire » et de « courbe » peuvent être reliées par la notion de paramétrisation, les équations (9) pouvant être considérées comme la paramétrisation d'une courbe. Mais la réciproque n'a aucune raison d'être vraie dans le cas général, toute courbe n'étant pas nécessairement la matérialisation d'une trajectoire.

Notre travail va consister à extraire des propriétés d'une trajectoire celles qui peuvent être corrélées aux propriétés géométriques de la courbe correspondante pour les associer aux contraintes du système physique envisagé.

²⁴ Un point matériel correspond à un phénomène matérialisé qui peut être représenté concrètement par un point géométrique.

Pour ce faire, nous passerons successivement par les étapes suivantes :

- Nous admettrons que le principe d'inertie s'applique à notre point matériel, ce qui veut dire que, s'il ne subit aucune contrainte, la courbe correspondant à sa trajectoire sera une droite le long de laquelle ce point se déplacera d'un mouvement uniforme ; sa vitesse sera constante en direction et grandeur.

Il faut bien avoir à l'esprit ce que signifie le fait que notre particule obéit au principe d'inertie : si on la « secoue », ou plus académiquement parlant, si on la perturbe à un instant donné, elle va changer de vitesse, module et direction, et obéira de nouveau au principe d'inertie avec cette nouvelle vitesse, jusqu'à ce qu'elle soit à nouveau perturbée. À chaque instant, elle obéit donc au principe d'inertie, même si les conditions de ce dernier varient d'un instant à l'autre.

L'application de ce principe montre alors que la perturbation est liée à la variation de la vitesse et met en évidence l'importance de cette dernière. Nous commencerons donc par définir la notion de vitesse après avoir rappelé pour ce faire ce qu'est la longueur d'un élément de la trajectoire (rectification d'un arc de courbe).

- Nous étudierons ensuite les propriétés d'une trajectoire sous contraintes en considérant sur la courbe correspondante les positions du point matériel à trois instants successifs séparés par deux intervalles de temps égaux Δt (figure 21).

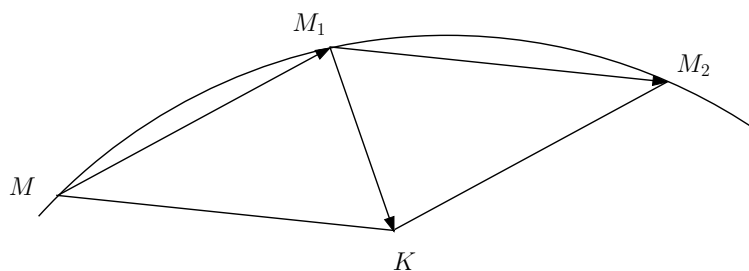


Figure 21. La courbe n'a aucune raison d'être plane. Les arcs $\widehat{MM_1}$ et $\widehat{M_1M_2}$ sont parcourus pendant des durées égales.

D'après la définition des vitesses, nous montrerons que les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}/\Delta t$ et $\overrightarrow{M_1M_2}/\Delta t$ sont des approximations des vitesses \vec{V}_M et \vec{V}_{M_1} de la particule en M et M_1 et qui tendent vers ces dernières quand Δt tend vers 0.

Le vecteur $\overrightarrow{M_1K}/\Delta t$, obtenu par la règle du parallélogramme, représentera la variation de vitesse que cette dernière a subie lorsque la particule passe du point M au point M_1 sur la courbe.

- Il n'est alors pas illogique de penser, puis de postuler, qu'une action s'est développée le long de la direction M_1K qui a contribué à changer la vitesse de la particule. Nous étudierons alors la limite de cette direction quand Δt tend vers 0, limite à laquelle sera associée une entité nommée « accélération » qui se trouve placée dans un plan particulier associé au point M de la courbe, le plan osculateur.
- Nous montrerons ensuite que les éléments géométriques permettent, à eux seuls, de reconstituer une courbe, c'est-à-dire qu'il est possible de définir une courbe à partir de sa propre structure. Cette description est réalisable à partir d'un trièdre de référence

associé à chaque instant au mobile qui décrit la trajectoire ou, ce qui revient au même en l'occurrence, en chaque point de la courbe. Ce sera la théorie du *trièdre de Frenet*.

- La physique pourra alors rejoindre la géométrie car nous aurons, à ce moment-là, tout les éléments en main pour postuler que ce qui déforme la trajectoire de la particule correspond à une force placée dans la direction de cette accélération.

Nous aurons ainsi introduit les équations de Newton décrivant la trajectoire d'une particule sous l'action d'une force qui s'exerce sur elle en chaque point.

Il ne nous reste plus qu'à suivre point par point ce programme.

La rectification d'un arc de courbe.

Par le simple fait que l'observateur est capable de reconstituer la trajectoire en une courbe qu'il représente dans un espace à trois dimensions, cette dernière possède des propriétés mathématiques minimales : elle est au moins de classe C_1 par morceaux²⁵. En pratique, cela veut dire que la courbe peut être tracée « à la main » ou sur un enregistreur presque sans relever la plume ou le stylet. Nous reprenons donc des hypothèses du début du paragraphe précédent (9) : la courbe représentative de la trajectoire est décrite dans le repère euclidien orthonormé de dimension 3 par les équations paramétriques :

$$(9) \quad M(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

où t est l'instant où le mobile M a été repéré pendant qu'il se déplace ; le nombre réel t varie dans un intervalle de $\mathbb{R} [t_0, t_1]$ avec $t_0 < t_1$ et les fonctions x, y, z sont supposées continûment dérivables par morceaux²⁶.

L'une des premières questions qui se posent alors est celle de la longueur du tracé (donc de la trajectoire correspondante). Les mathématiciens ont étendu les méthodes d'arpentage au calcul de la longueur d'un arc de courbe et montré sous quelles conditions une chaîne de segments construits sur une courbe tendait vers une limite qu'on a appelé la longueur de l'arc de courbe²⁷

²⁵ La physique exige des conditions plus restrictives : il faut que la dérivée seconde existe partout, sauf en un nombre fini de points. C'est ce que nous supposerons désormais.

²⁶ On dit alors, selon Appel, que les équations du mouvement sont données sous forme finie ou explicite (par opposition à une forme implicite). Avoir choisi un espace euclidien (donc un produit scalaire) est lié au fait que l'observateur est capable de mesurer des longueurs dans cet espace. Les axes ont été choisis orthonormés par souci de simplification de présentation du sujet. Dans ces conditions, et avec des notations évidentes, la longueur du segment M_0M_1 est donnée par la formule (théorème de Pythagore) :

$$\|M_0M_1\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

²⁷ Voir par exemple : Valiron Georges, *Cours d'analyse mathématique*, tome 1, *Théorie des fonctions*, Masson, Paris, (troisième édition 1966) ; tome 2, *Équations fonctionnelles, Applications*, Masson, Paris, (deuxième édition 1950) ; Bass Jean, *Cours de mathématiques*, trois tomes, Masson, 1978.

Les hypothèses que nous avons admises sont plus que suffisantes pour nous permettre d'écrire la longueur de l'arc de courbe allant de M_0 à M_1 sous la forme²⁸ :

$$l(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| dt$$

Rappelons que, sous des hypothèses moins restrictives que celles que nous avons choisies²⁹, pour définir la longueur d'un arc de courbe par la formule ci-dessus, il a fallu auparavant montrer que :

- quelle que soit la manière dont on approche cette longueur par une suite de segments dont les extrémités s'appuient sur la courbe et dont la longueur tend vers 0, cette suite tend vers une limite unique. C'est cette limite que l'on choisit pour définir la longueur de l'arc de courbe ;
- pour ce faire, on démontre que le rapport de la longueur d'un arc de courbe au segment qui le soutient tend vers 1 lorsque la longueur du segment tend vers 0 ;
- que, si la même courbe est décrite de façon différente par une autre paramétrisation, la longueur calculée sera la même et que les deux façons de la calculer sont liées par l'égalité :

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| dt = \int_{t_1=u^{-1}(\tau_1)}^{t_2=u^{-1}(\tau_2)} \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\tau} \right\| d\tau$$

si $s = u(t)$ ($s_1 = u(t_1)$, $s_2 = u(t_2)$) décrit la nouvelle paramétrisation³⁰.

Il est alors logique de se poser la question de savoir si, parmi toutes les paramétrisations possibles, c'est-à-dire parmi toutes les transformations satisfaisant aux relations ci-dessus, il n'y en aurait pas une qui les simplifierait en rendant la norme sous l'intégrale constamment égale à 1. Supposons donc son existence, et soit $s = u(t)$ une transformation telle que :

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\| = 1 \quad \text{pour tout } s \text{ de l'intervalle, et, bien sûr} \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

²⁸ Nous noterons indifféremment la dérivée par rapport au temps d'une fonction sous l'une des formes

$$\frac{dx}{dt}, \quad \dot{x}, \quad x'$$

chacune ayant ses avantages selon les formules et nous omettrons chaque fois que faire se pourra la dépendance par rapport au temps.

²⁹ Il suffit que la fonction définissant la courbe soit à variations bornées.

³⁰ Le lien est évidemment fait entre les deux égalités par la relation :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

qui n'est autre que l'extension de la formule de dérivation composée et qui fournit, de plus, le jacobien de la transformation. Pour ce dernier, nous avons supposé que s et t varient dans le même sens, et donc que $ds/dt > 0$.

Les formules deviennent donc :

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| dt = \int_{t_1=u^{-1}(s_2)}^{t_2=u^{-1}(s_1)} \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\| \frac{ds}{dt} dt = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1$$

où nous nous sommes servis du fait que ds/dt est positif.

La signification géométrique du paramètre s apparaît donc clairement : $s_2 - s_1$ est la longueur de l'arc de courbe décrite en prenant comme origine sur la courbe le point $M_1 = M(t_1)$. Pour cette raison, s se nomme « abscisse curviligne de la courbe ». Nous verrons sa signification cinématique dans le paragraphe suivant.

La notion de vitesse.

- Rappelons brièvement ces quelques notions de cinématique.

Un point matériel M est dit « en mouvement » par rapport à un observateur S lorsque sa position avec l'observateur varie avec le temps.

Nous avons vu que sa *trajectoire* est mathématiquement définie dans un système de trois axes non coplanaires (image mathématique du *repère* physique) à partir des coordonnées (x, y, z) du point M de la formule (9).

Pour augmenter nos connaissances sur cette trajectoire, il est aussi intéressant de décrire le mouvement sur cette dernière sous forme d'une équation, dite *horaire*, obtenue en choisissant une origine O sur la trajectoire, un sens positif et en décrivant au cours du temps la valeur algébrique de la longueur de l'arc de courbe \widehat{OM} :

$$(10) \quad s = \widehat{OM} = f(t)$$

- Un mouvement est alors dit *uniforme* quand le mobile, se déplaçant toujours dans le même sens, parcourt des espaces proportionnels au temps employé pour les parcourir. Avec les conventions ci-dessus, si O est l'origine sur la trajectoire, un sens positif étant choisi, s_0 étant la valeur de s à l'instant 0, la valeur algébrique de la vitesse V d'un mouvement uniforme est par définition le chemin parcouru pendant l'unité de temps. Cette définition est rendue possible puisque :

$$\frac{s - s_0}{t} = \text{Cte} = \left(\begin{array}{l} \text{chemin algébrique} \\ \text{parcouru pendant} \\ \text{l'unité de temps} \end{array} \right) = V = \text{vitesse algébrique}$$

Pour un mouvement uniforme, il est alors possible de définir une quantité représentée par \overrightarrow{MV} caractérisée par

- une origine, le point M sur la trajectoire ;
- une direction, la tangente en M à la trajectoire ;
- un sens, celui du mouvement ;
- une longueur, la valeur absolue du nombre algébrique V .

Cette quantité est notée \overrightarrow{MV} et est appelée usuellement « vecteur vitesse », à tort puisque, par construction, c'est un torseur.

- Généralisons maintenant cette notion de vitesse à un mouvement varié.

Lorsqu'on dit : « Je roule à 100km/h », tout le monde en comprend la signification : « Si je continue à rouler à la même allure pendant une heure, j'aurai parcouru 100 km ». Rares sont ceux, cependant, qui la mettent réellement en application. En pratique, ils réduisent la durée, ce qui leur permet de réduire la distance parcourue à une vitesse uniforme à une valeur plus compatible avec les circonstances de la conduite. Nous allons pratiquer la même méthode en diminuant la durée jusqu'à la faire tendre vers 0, ce qui permettra d'introduire la notion de vitesse instantanée.

Le mobile se trouve en M sur la trajectoire à l'instant t ; après déplacement, il occupe la position M_1 à l'instant $t_1 = t + \Delta t$; Δt est supposé petit. Il y a alors deux possibilités de décrire une vitesse.

1. La première consiste à supposer que le mouvement est approximativement un mouvement uniforme pendant Δt . La valeur approchée de sa vitesse est alors \overrightarrow{MU} . C'est un torseur

- qui est tangent à la trajectoire en M ,
- qui a le même sens que MM_1 ,
- et dont la module vaut $\frac{\widehat{MM_1}}{\Delta t}$

C'est donc la vitesse d'un mobile fictif parcourant d'un mouvement uniforme MM_1 , partant de M en même temps que le mobile et arrivant en M_1 en même temps que lui.

2. La seconde postule que la vitesse moyenne du mobile pendant le temps Δt est le vecteur \overrightarrow{MW} :

- porté par la droite MM_1 ,
- et de module $\frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t}$.

C'est donc la vitesse que posséderait un mobile fictif parcourant le segment MM_1 pendant le même temps Δt que le mobile parcourt l'arc MM_1 .

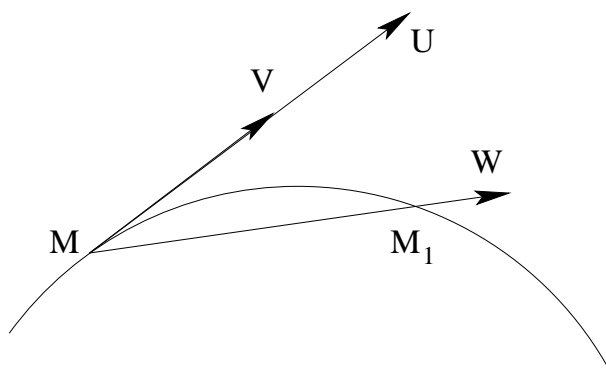


Figure 22. La courbe peut être gauche. Les deux définitions équivalentes de la vitesse : limite de \overrightarrow{MU} dans un cas et de \overrightarrow{MW} dans l'autre.

À la limite où Δt tend vers 0, ces deux torseurs ont :

- même point d'application : le point M ;
- même direction : la tangente en M à la trajectoire ;
- même sens : celui du mouvement à t .
- et même module puisque

$$\lim \frac{\widehat{MM_1}}{\Delta t} = \lim \frac{\widehat{MM_1}}{\text{corde } MM_1} \lim \frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t} = \lim \frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t}$$

le rapport de la corde sur l'arc tendant vers 1 comme nous l'avons vu.

Ces deux définitions sont donc équivalentes et définissent « la vitesse à l'instant t ». Par construction même, mathématiquement, la vitesse correspond donc à un torseur et la valeur algébrique de cette vitesse vaut :

$$(11) \quad V = \frac{ds}{dt}$$

avec comme sens positif sur la tangente le sens des s croissant. Si $Oxyz$ est un trièdre trirectangle lié à l'observateur, donc au système de référence,

$$\alpha = \frac{dx}{ds} ; \quad \beta = \frac{dy}{ds} ; \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

sont les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire orientée dans le sens des s croissants.

Par ailleurs, l'équation de la tangente, qui est indépendante du choix d'une paramétrisation, s'écrit en utilisant le paramètre temps

$$(12) \quad \frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}$$

et fait apparaître les quantités

$$(13) \quad \left. \begin{array}{l} x' \equiv \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ y' \equiv \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\ z' \equiv \dot{z} = \frac{dz}{dt} \end{array} \right\} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha \frac{ds}{dt} = \alpha V \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \beta \frac{ds}{dt} = \beta V \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} = \gamma \frac{ds}{dt} = \gamma V \end{aligned}$$

Elles représentent la projection sur les axes de coordonnées du vecteur \overrightarrow{V} et permettent d'identifier la quantité $d\overrightarrow{OM}/dt$ avec \overrightarrow{V}

$$(14) \quad \overrightarrow{V} \equiv \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

• D'après sa construction même, le vecteur associé à la vitesse instantanée a toutes les caractéristiques d'un vecteur polaire. Sa symétrie propre est donc celle d'un tronç de cône.

Nous pouvons alors définir un vecteur géométrique \overrightarrow{t} par :

$$(15) \quad \overrightarrow{t} = \begin{cases} \alpha = \frac{dx}{ds} \\ \beta = \frac{dy}{ds} \\ \gamma = \frac{dz}{ds} \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{t}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$$

et donc³¹ :

$$(16) \quad \overrightarrow{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \frac{ds}{dt} = V \overrightarrow{t}$$

REMARQUES :

On retrouve ainsi les quantités que nous avons définies lors du calcul de la longueur d'un arc de courbe.

• Plus généralement, en cinématique, toute dérivée par rapport au temps porte le nom de « vitesse » :

- une vitesse angulaire est la dérivée d'un angle par rapport au temps ;
- une vitesse aréolaire est la dérivée d'une aire par rapport au temps ;
- la vitesse d'un vecteur \overrightarrow{A} de projection X, Y, Z sur les axes est le vecteur $d\overrightarrow{A}/dt$, de projections

$$\frac{dX}{dt} \quad ; \quad \frac{dY}{dt} \quad ; \quad \frac{dZ}{dt} \quad .$$

• La vitesse est la dérivée d'une quantité vectorielle associée à un point, ce qui en fait un torseur. Mais, ce qui est important de comprendre, c'est que cette dérivée n'a de sens que dans ce repère où elle est calculée. Dans nos notations, c'est l'origine qui représente ce repère. On notera que La dérivée d'une fonction scalaire comme l'énergie, par exemple, peut, elle, être calculée dans n'importe quel repère, elle aura toujours la même valeur.

³¹ Comme le lecteur l'aura certainement remarqué, nous utilisons la notation \overrightarrow{t} pour le vecteur unitaire porté par la tangente en M et la lettre t pour désigner le temps, aucune confusion n'étant possible entre ces deux écritures.

- Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer mathématiquement le principe d'inertie qui correspond au mouvement rectiligne et uniforme d'une particule.

Il faut bien remarquer que c'est le principe d'inertie qui donne un sens physique à ces notions de cinématique. En cinématique, on ne fait que décrire un mouvement sur une courbe donnée, mais on ne recherche pas, ce qui est le rôle de la dynamique, comment et pourquoi le point reste sur la courbe ou pourquoi il décrit sa trajectoire.

La notion d'accélération.

- Une fois en possession de la notion de vitesse, nous pouvons poursuivre notre démarche décrite au début de cette partie. Remplaçons séparément par leurs limites quand Δt tend vers 0 les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ divisés par Δt . D'après ce que nous venons de voir, ces limites sont respectivement les vitesses \overrightarrow{MV} et $\overrightarrow{M_1V_1}$ de la particule en M et en M_1 . la figure 21 est alors remplacée par la figure 23.

Sur sa trajectoire, la particule se trouve en M à l'instant t avec la vitesse \overrightarrow{MV} ; il se trouvera en M_1 à l'instant $t + \Delta t$ avec la vitesse $\overrightarrow{M_1V_1}$. Si nous portons en M le vecteur \overrightarrow{MU} parallèle à $\overrightarrow{M_1V_1}$, le vecteur \overrightarrow{MH} qui est égal à la différence géométrique entre les vecteurs \overrightarrow{MV} et \overrightarrow{MU} représente donc la variation que la vitesse a subi lorsque la particule est passée de M à M_1 pendant le temps Δt . C'est l'analogue du vecteur $\overrightarrow{M_1K}$ de la figure 21.

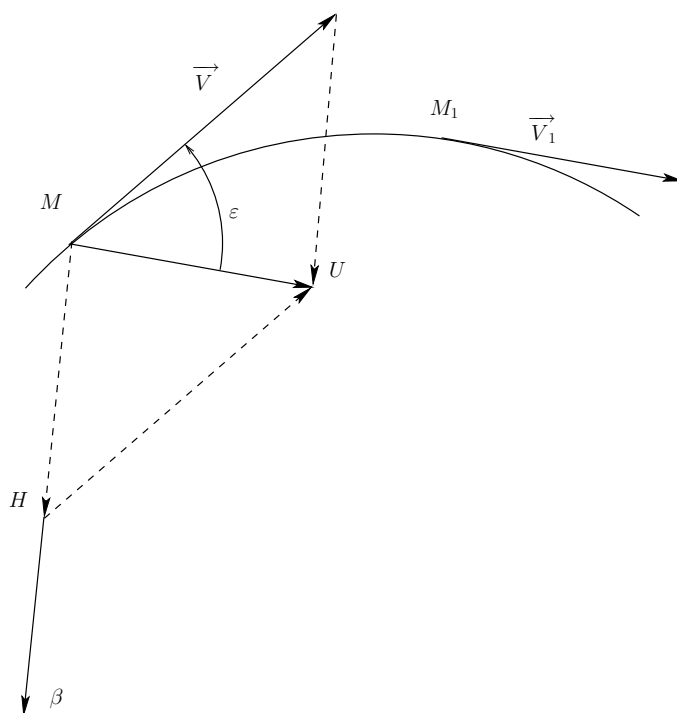


Figure 23. La particule matérielle se trouve au point M de sa trajectoire représentée par la courbe associée ainsi que sa vitesse. Elle est en M_1 à l'instant $t + \Delta t$. On associe en M le vecteur géométrique équipollent à la vitesse $\overrightarrow{V_1}$. \overrightarrow{MH} représente la différence géométrique des vitesses, et la division de cette dernière par Δt fournit $\overrightarrow{M\beta}$ qui est, par définition, la valeur moyenne de l'accélération subie par la particule lorsqu'elle passe de M à M_1 sur la courbe. Cette dernière n'a toujours aucune raison d'être plane.

Le taux de variation, $\overrightarrow{M\beta} = \overrightarrow{MH} / \Delta t$ est alors appelé *accélération moyenne de la particule quand cette dernière passe de M à M_1 pendant Δt* .

Nous supposons que la limite quand Δt tend vers 0 de l'expression ci-dessus existe. Nous l'appellerons $\overrightarrow{M\gamma}$ qui sera, par définition, *l'accélération de la particule en M à l'instant t* .

Dans ces conditions, le taux de variation de la vitesse en passant de M à M_1 s'écrit d'après (14)

$$\frac{\overrightarrow{MH}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V}}{\Delta t} = \frac{\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}{\Delta t}$$

Mais, puisque la fonction \overrightarrow{OM} est supposée deux fois dérivable, la formule de Taylor-Young permet d'écrire

$$\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t + \Delta t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) + \Delta t \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) + o(\Delta t)$$

et le taux de variation de vitesse se simplifie au premier ordre en

$$\frac{\overrightarrow{MH}}{\Delta t} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + o(\Delta t)$$

et donne, à la limite, l'accélération de la particule en M à l'instant t par

$$(17) \quad \overrightarrow{M\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Si une base est choisie comme dans (13), les composantes de cette accélération s'écriront :

$$(18) \quad \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \begin{cases} \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

- Nous allons montrer que, si la limite existe, cette accélération se trouve dans un plan particulier lié à la courbe et passant par le point M , appelé le *plan osculateur*. Si la courbe est plane, le plan osculateur se confond avec le plan de la courbe et l'accélération est dans ce plan.

Comme nous l'avons déjà dit, il n'y a aucune raison pour que la trajectoire soit plane et la figure 23 ne doit pas être comprise dans ce sens. La droite qui supporte le vecteur vitesse \overrightarrow{MV} et le point M_1 forme un plan qui tourne autour de la droite quand M_1 tend vers M . Nous allons établir l'équation de ce plan et montrer qu'il tend vers un plan limite quand M_1 tend vers M .

La droite tangente en M à la courbe a pour équations (12) :

$$\frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}} = \frac{Z - z}{\dot{z}}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées d'un point courant de cette droite, les autres expressions sont des fonctions du temps. Ces équations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} X\dot{z} - Z\dot{x} - (x\dot{z} - z\dot{x}) &= 0 \\ Y\dot{z} - Z\dot{y} - (y\dot{z} - z\dot{y}) &= 0 \end{aligned}$$

et s'interpréter comme l'intersection de deux plans. ces plans font alors partie d'un faisceau de plans passant par la tangente et dont l'équation générale, dépendant d'un paramètre réel λ , s'écrit :

$$X\dot{z} - Z\dot{x} - (x\dot{z} - z\dot{x}) + \lambda [Y\dot{z} - Z\dot{y} - (y\dot{z} - z\dot{y})] = 0$$

Il n'y a plus qu'à imposer à l'un de ces plans de passer par le point M_1 de coordonnées (x_1, y_1, z_1) pour obtenir la valeur de λ et l'équation du plan cherché. Nous avons donc :

$$\lambda = -\frac{x_1\dot{z} - z_1\dot{x} - (x\dot{z} - z\dot{x})}{y_1\dot{z} - z_1\dot{y} - (y\dot{z} - z\dot{y})}$$

qu'il suffit de reporter dans l'équation générale du faisceau pour obtenir l'équation de ce plan

$$X\dot{z} - Z\dot{x} - (x\dot{z} - z\dot{x}) = \frac{x_1\dot{z} - z_1\dot{x} - (x\dot{z} - z\dot{x})}{y_1\dot{z} - z_1\dot{y} - (y\dot{z} - z\dot{y})} [Y\dot{z} - Z\dot{y} - (y\dot{z} - z\dot{y})]$$

qui, ordonné par rapport à X, Y, Z prend la forme :

$$\begin{aligned} &X\dot{z} [(y_1 - y)\dot{z} - (z_1 - z)\dot{y}] \\ &+ Y\dot{z} [(z_1 - z)\dot{x} - (x_1 - x)\dot{z}] \\ &+ Z\dot{z} [(x_1 - x)\dot{y} - (y_1 - y)\dot{x}] \\ &- (x\dot{z} - z\dot{x}) [(y_1 + y)\dot{z} - (z_1 + z)\dot{y}] \\ &+ (y\dot{z} - z\dot{y}) [(x_1 + x)\dot{z} - (z_1 + z)\dot{x}] = 0 \end{aligned}$$

Reste à trouver la limite de ce plan quand M_1 tend vers M . Pour cela, rappelons qu'à l'ordre 2, nous pouvons écrire.

$$x_1(t) = x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}(t) + \mathcal{o}(\Delta t^2)$$

et de même pour les autres composantes. En convenant, comme précédemment, de ne pas faire apparaître la variable t pour simplifier l'écriture, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \Delta t \dot{x} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x} + \mathcal{o}(\Delta t^2) \\ y_1 &= y + \Delta t \dot{y} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{y} + \mathcal{o}(\Delta t^2) \\ z_1 &= z + \Delta t \dot{z} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{z} + \mathcal{o}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Chacun des coefficients du plan s'écrit alors, à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
(y_1 - y)\dot{z} - (z_1 - z)\dot{y} &= \Delta t \dot{y}\dot{z} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{y}\dot{z} - \Delta t \dot{z}\dot{y} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{z}\dot{y} + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2}(\ddot{y}\dot{z} - \ddot{z}\dot{y}) + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \\
(z_1 - z)\dot{x} - (x_1 - x)\dot{z} &= \Delta t \dot{z}\dot{x} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{z}\dot{x} - \Delta t \dot{x}\dot{z} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{x}\dot{z} + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2}(\ddot{z}\dot{x} - \ddot{x}\dot{z}) + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \\
(x_1 - x)\dot{y} - (y_1 - y)\dot{x} &= \Delta t \dot{x}\dot{y} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{x}\dot{y} - \Delta t \dot{y}\dot{x} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{y}\dot{x} + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2}(\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}) + \mathfrak{o}(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

De son côté, le terme constant s'écrit :

$$\begin{aligned}
&- (x\dot{z} - z\dot{x})[2y\dot{z} + \Delta t \dot{y}\dot{z} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{y}\dot{z} - 2z\dot{y} - \Delta t \dot{z}\dot{y} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{z}\dot{y} + \mathfrak{o}(\Delta t^2)] \\
&+ (y\dot{z} - z\dot{y})[2x\dot{z} + \Delta t \dot{x}\dot{z} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{x}\dot{z} - 2z\dot{x} - \Delta t \dot{z}\dot{x} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{z}\dot{x} + \mathfrak{o}(\Delta t^2)] \\
&= -\frac{\Delta t^2}{2}(x\dot{z} - z\dot{x})(\ddot{y}\dot{z} - \ddot{z}\dot{y}) + \frac{\Delta t^2}{2}(y\dot{z} - z\dot{y})(\ddot{x}\dot{z} - \ddot{z}\dot{x}) + \mathfrak{o}(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation du plan et en passant à la limite, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
(19) \quad &X\dot{z}(\ddot{y}\dot{z} - \ddot{z}\dot{y}) + Y\dot{z}(\ddot{x}\dot{z} - \ddot{z}\dot{x}) + Z\dot{z}(\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}) \\
&- (x\dot{z} - z\dot{x})(\ddot{y}\dot{z} - \ddot{z}\dot{y}) - (y\dot{z} - z\dot{y})(\ddot{x}\dot{z} - \ddot{z}\dot{x}) = 0
\end{aligned}$$

Cette limite existe donc. C'est un plan. On l'appelle *plan osculateur à la courbe en M*. Il est à noter également que la normale à ce plan est parallèle au vecteur de coordonnées

$$(\ddot{y}\dot{z} - \ddot{z}\dot{y}, \ddot{x}\dot{z} - \ddot{z}\dot{x}, \ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x})$$

et donc parallèle au produit vectoriel $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$. Le plan osculateur contient donc l'accélération.

Vitesse et accélération dans divers systèmes de coordonnées.

Le principe du calcul de la vitesse et de l'accélération dans un système de coordonnées quelconques est toujours le même : on part de la définition de la vitesse ou de l'accélération en coordonnées cartésiennes et l'on y introduit via le théorème de dérivations des fonctions composées les coordonnées généralisées ; il suffit ensuite de faire apparaître une base adaptée au système de coordonnées choisi.

- Coordonnées polaires.

Par définition, la vitesse au point M a pour composantes les composantes de $d\overrightarrow{OM}/dt$ dans le système de référence O, \vec{i}, \vec{j} (figure 24)

$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

Si M est défini à partir des coordonnées polaires ρ, θ

$$|\overrightarrow{OM}| = \rho; \quad x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta$$

le théorème de dérivation d'une fonction composée permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \theta \frac{d\rho}{dt} - \rho \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \sin \theta \frac{d\rho}{dt} + \rho \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

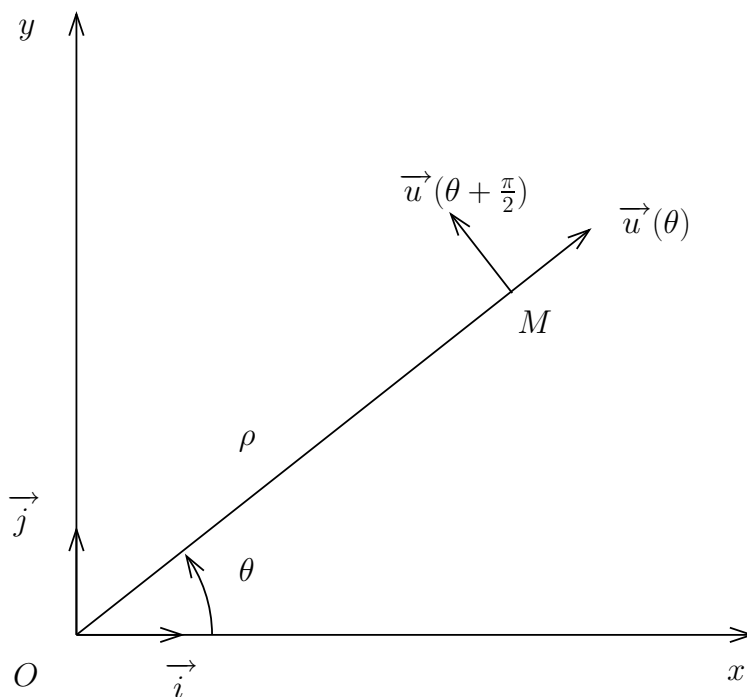


Figure 24. Coordonnées polaires. Les notations.

Si nous reportons ces résultats dans la définition de la vitesse, nous obtenons pour ses composantes polaires :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M) &= \frac{d\rho}{dt} (\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) + \rho \frac{d\theta}{dt} (-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta) \\ (20) \quad &= \frac{d\rho}{dt} \vec{u}(\theta) + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

ce qui fournit les composantes de la vitesse dans la base $u(\theta)$, $u(\theta + \pi/2)$ et où $u(\theta)$ est défini par

$$u(\theta) \equiv \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$$

Le calcul des composantes de l'accélération s'effectue de la même façon :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cos \theta - \left[2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\rho}{dt^2} \right] \sin \theta \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \sin \theta + \left[2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\rho}{dt^2} \right] \cos \theta \end{aligned}$$

En posant pour simplifier :

$$(21) \quad \gamma_\rho \equiv \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \text{et} \quad \gamma_\theta \equiv 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

les composantes polaires de l'accélération vont s'écrire

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M) &= \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} \\ (22) \quad &= \gamma_\rho (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \gamma_\theta (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{j}) \\ &= \gamma_\rho \vec{u}(\theta) + \gamma_\theta \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

- Coordonnées cylindriques.

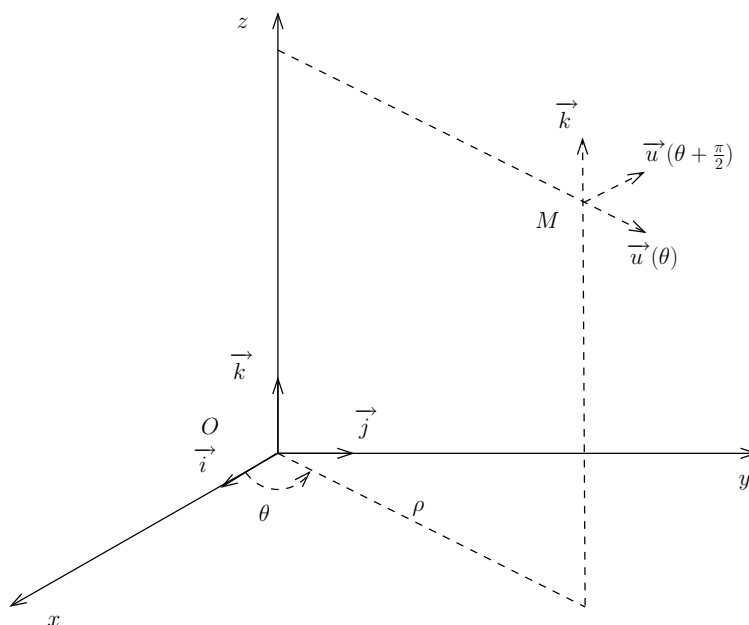


Figure 25. Coordonnées cylindriques. Les notations.

Dans ces coordonnées, mélange des coordonnées polaires et cartésiennes, M dépend de trois paramètres ρ , θ , z (figure 25) dont le lien avec les coordonnées cartésiennes est

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad z = z$$

Le calcul, partant de la vitesse

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

étant le même, pour les deux premiers termes, que celui pour les coordonnées polaires, il suffira d'ajouter au résultat de ce dernier le terme en dz/dt . Ce qui donne d'après (20)

$$(23) \quad \overrightarrow{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}(\theta) + \rho \frac{d\theta}{dt}\vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Il en est de même pour l'accélération qui s'écrit, en utilisant (21) et (22)

$$(24) \quad \overrightarrow{\Gamma}(M) = \gamma_\rho \vec{u}(\theta) + \gamma_\theta \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2}) + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

- Coordonnées sphériques.

Les coordonnées sphériques forment un exemple beaucoup plus intéressant d'application du principe de calcul décrit au début de ce paragraphe. Elles sont définies (figure 26) par :

$$x = r \cos \theta \cos \varphi; \quad y = r \cos \theta \sin \varphi; \quad z = r \sin \theta$$

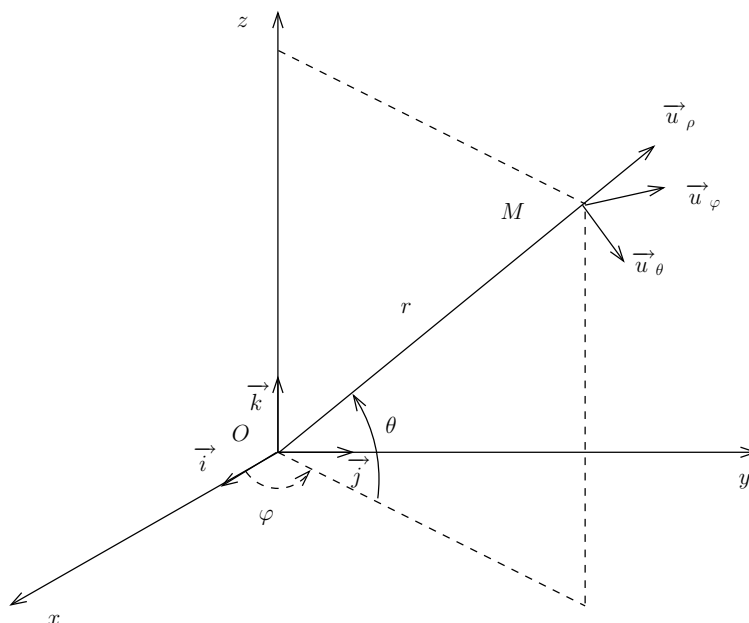


Figure 26. Coordonnées sphériques. Les notations.

En reportant

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \cos \theta \cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \cos \varphi \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \cos \theta \sin \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} + r \cos \theta \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

dans les composantes de la vitesse et en posant :

$$(25) \quad \begin{aligned}\vec{u}_r &\equiv \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} + \sin \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta &\equiv -\sin \theta \cos \varphi \vec{i} - \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi &\equiv -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}\end{aligned}$$

la vitesse s'écrit

$$(26) \quad \vec{V}(M) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi$$

Il est à noter que les vecteurs définis dans (25) sont unitaires et orthogonaux deux à deux. De plus,

- \vec{u}_r est dirigé de O vers M sur l'axe OM ;
- \vec{u}_θ est dans le plan $\theta = \text{Cte}$; il est tangent dans ce plan au cercle de rayon OM et est orienté dans le sens des θ croissants ;
- \vec{u}_φ est perpendiculaire au plan $\theta = \text{Cte}$ et il est orienté dans le sens des φ croissants ;
- enfin, si nous posons $\vec{u}(\theta, \varphi) \equiv \vec{u}_r$, nous avons $\vec{u}_\theta = \vec{u}(\theta + \pi/2, \varphi)$.

Le calcul de l'accélération nécessite celui des dérivées de \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_φ . Évaluons-les :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= (-\sin \theta \cos \varphi \vec{i} - \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) \frac{d\theta}{dt} + (\cos \theta \sin \varphi \vec{i} + \cos \theta \cos \varphi \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= (-\cos \theta \cos \varphi \vec{i} - \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k}) \frac{d\theta}{dt} + (\sin \theta \sin \varphi \vec{i} - \sin \theta \cos \varphi \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r - \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \\ \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} &= (-\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

et il reste à exprimer, dans la dernière équation, \vec{i} et \vec{j} en fonction de \vec{u}_r , \vec{u}_θ , \vec{u}_φ . Pour cela, éliminons \vec{k} dans les deux premières équations du système (25) en multipliant la première par $\cos \theta$ et la seconde par $-\sin \theta$, puis en les additionnant, ce qui donne

$$\vec{u}_r \cos \theta - \vec{u}_\theta \sin \theta = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

ce qui est exactement la relation dont nous avons besoin et évite, du même coup, la résolution complète du système. La dernière équation du système précédent s'écrit donc

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = (-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta)\frac{d\varphi}{dt}$$

et nous disposons de tous les éléments pour le calcul de la dérivée de la vitesse qui s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M) &= \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \cos^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r \\ (27) \quad &+ \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_\theta \\ &+ \left[2 \cos\theta \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - 2r \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \cos\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

et fournit les composantes cherchées en coordonnées sphériques.

Accélération et géométrie des courbes associées aux trajectoires.

- Complétons les informations que nous possédons sur le plan osculateur et représentons sur la figure 27 le plan défini par M_1 , M et la tangente MT en M . La courbe, tangente en M et passant par M_1 n'est pas représentée sur cette figure puisqu'en principe elle ne fait que traverser le plan. Dans ce plan, il n'existe qu'un cercle passant par M , M_1 et tangent en M à la droite MT qui supporte la vitesse de la particule en M ; son centre, C_1 , se trouve à l'intersection de la perpendiculaire en M à MT et de la médiatrice du segment MM_1 .

Les relations métriques dans le triangle rectangle MM_1M' permettent alors d'écrire :

$$MM_1^2 = MH_1 MM' = 2MH_1 MC_1$$

ce qui se transforme en

$$(28) \quad MC_1 = MM_1 \frac{MM_1}{2MH_1} = \frac{MM_1}{2 \cos \varphi} = \frac{MM_1}{2 \sin \alpha}$$

et nous allons montrer que le membre de droite admet une limite quand M_1 tend vers M en restant sur la courbe.

Le membre de droite de la relation (28) est un nombre positif. Il est alors possible d'évaluer $\sin \alpha$ à partir du produit vectoriel d'un vecteur choisi le long de la tangente en M , par exemple la vitesse $d\vec{OM}/dt$, et du vecteur \vec{MM}_1 :

$$\sin \alpha = \frac{\left\| \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{MM}_1 \right\|}{\left\| \frac{d\vec{OM}}{dt} \right\| \left\| \vec{MM}_1 \right\|}$$

En tenant compte de

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \Delta t^2 + \mathfrak{o}(\Delta t^2)$$

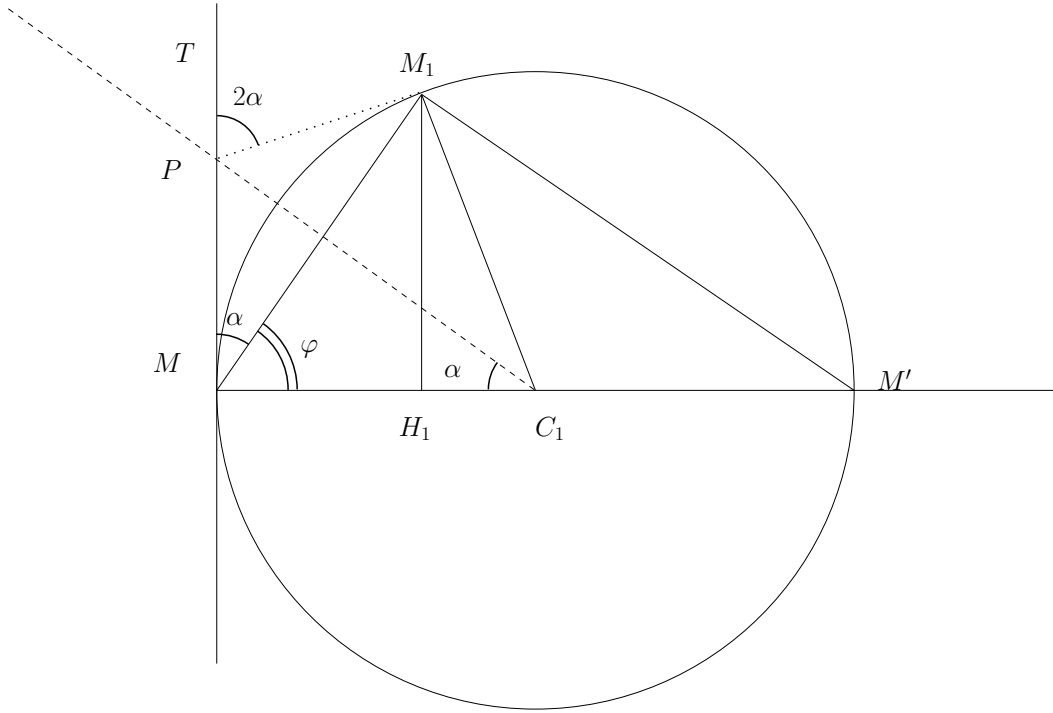


Figure 27. La figure représente le plan défini par les points M , M_1 et le support MT de la vitesse \overrightarrow{MV} de la figure 23. La courbe qui passe par M et M_1 n'est pas représentée car il n'y a aucune raison pour qu'elle se trouve dans le plan de la figure.

et en reportant ces résultats dans la relation (28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} MC_1 &= MM_1 \frac{MM_1}{2MH_1} \\ &= \frac{\left\| \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)^2 \Delta t^2 + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \right\| \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|}{2 \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \Delta t^2 + \mathfrak{o}(\Delta t^2) \right) \right\|} \\ &= \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|^3 \Delta t^2 + \mathfrak{o}(\Delta t^2)}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right\| \Delta t^2 + \mathfrak{o}(\Delta t^2)} \end{aligned}$$

D'où, par passage à la limite, les

THÉORÈME ET DÉFINITIONS :

Quand Δt tend vers 0, M_1 tend vers M , et la longueur MC_1 tend vers une limite MC définissant un point C . Ce point est situé dans le plan osculateur sur la normale à la courbe et sa position définit la concavité de cette dernière.

La longueur MC s'appelle le rayon de courbure de la courbe au point M (à l'instant t) et se note R . Son inverse s'appelle la courbure. Le point C s'appelle centre de courbure de la courbe au point M et nous avons :

$$(29) \quad R \equiv MC = \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|^3}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right\|} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}{[(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2]^{1/2}}$$

dans un système orthonormé de coordonnées cartésiennes associé à la courbe.

Nous pouvons caractériser cette normale en M à la trajectoire par un vecteur de norme 1 comme se trouvant sur cette droite avec, lui aussi, pour origine le point M et dirigé vers le centre de courbure. Nous le noterons \vec{n} . Les vecteurs \vec{t} et \vec{n} , étant orthogonaux, forment donc une base du plan osculateur en M .

De plus le cercle initial de la figure 27 a lui même pour limite un cercle, « triplement » tangent à la courbe au point M . Ce cercle se trouve donc dans le plan osculateur et s'appelle évidemment le cercle osculateur en M .

Remarquons enfin que, si la courbe correspondant à la trajectoire était un cercle de rayon R , ce cercle serait celui de la figure 27. Dans ces conditions, le membre de droite de la relation (28) vaut R pour tout α , comme nous pouvions nous y attendre.

- Les figures 23 et 27 représentent des éléments qui sont très semblables. La droite M_1P est tangente en M_1 au cercle de centre C_1 , et l'angle $\widehat{M_1PT}$ qui vaut 2α est l'analogue de l'angle ε de la figure 23 qui est l'angle entre les deux vitesses. Contrairement au contexte de la figure 23 où la courbe représentant la trajectoire est réelle, il n'y a pas de notion de vitesse dans la figure 27. Ce qui lie les deux figures est que l'axe de la tangente en M_1 au cercle tendra vers l'axe de la vitesse \vec{V}_1 lorsque M_1 tendra vers M .

Pour mettre cela en évidence, considérons l'analogue sur la figure 23 de ce qui a servi à définir le rayon de courbure à partir de la figure 27 et faisons intervenir la définition de ce dernier, soit :

$$(30) \quad \frac{\widehat{MM_1}}{\varepsilon} = \frac{\widehat{MM_1}}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\varepsilon}$$

Le premier terme du second membre tendra, comme nous venons de le voir, vers le rayon de courbure de la courbe en M . Il nous reste à évaluer la limite du second lorsque Δt tend vers 0.

Nous évaluerons les angles, ou leurs sinus, à partir du module de produits vectoriels et donc par :

$$\sin \alpha = \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \overrightarrow{MM_1} \right\|}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| \left\| \overrightarrow{MM_1} \right\|} \quad \text{et} \quad \sin \varepsilon = \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| \left\| \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right\|}$$

En tenant compte de

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_1} &= \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Delta t^2 + o(\Delta t^2) \\ \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{dt^3} \Delta t^2 + o(\Delta t^2) \end{aligned}$$

et en reportant dans le second terme du second membre de (30), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \alpha}{\varepsilon} &= \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right\| \Delta t^2}{\left\| \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right) \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{dt^3} \right) \Delta t^2 \right\|} \\ &\quad \times \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{dt^3} \Delta t^2 \right\| + o(\Delta t^2)}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Delta t^2 \right\| + o(\Delta t^2)} \end{aligned}$$

Après simplification par Δt^2 , lorsque Δt tend vers 0, le numérateur et le dénominateur de l'expression précédent tendent chacun vers

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right\| \cdot \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|$$

et donc leur rapport tend vers 1.

Conclusion : lorsque Δt tend vers 0, les quantités

$$\frac{\widehat{MM_1}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{MM_1}}{2 \sin \alpha}$$

tendent toutes deux vers une limite commune ; ce qui nous fournit deux définitions équivalentes du rayon de courbure au point M :

$$(31) \quad R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM_1}}{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM_1}}{2 \sin \alpha}$$

• Comme l'accélération, vecteur lié au point M , se trouve dans le plan osculateur, il est intéressant de pouvoir la décrire dans un système de coordonnées de ce plan. Ce dernier nous est naturellement proposé par le vecteur \vec{t} (15) lié à la vitesse en M et le vecteur \vec{n} que nous avons défini à partir de la courbure (29).

Ces deux vecteurs, \vec{t} et \vec{n} , étant orthogonaux, forment une base du plan osculateur en M , et c'est par rapport à cette base que nous allons calculer les composantes de l'accélération.

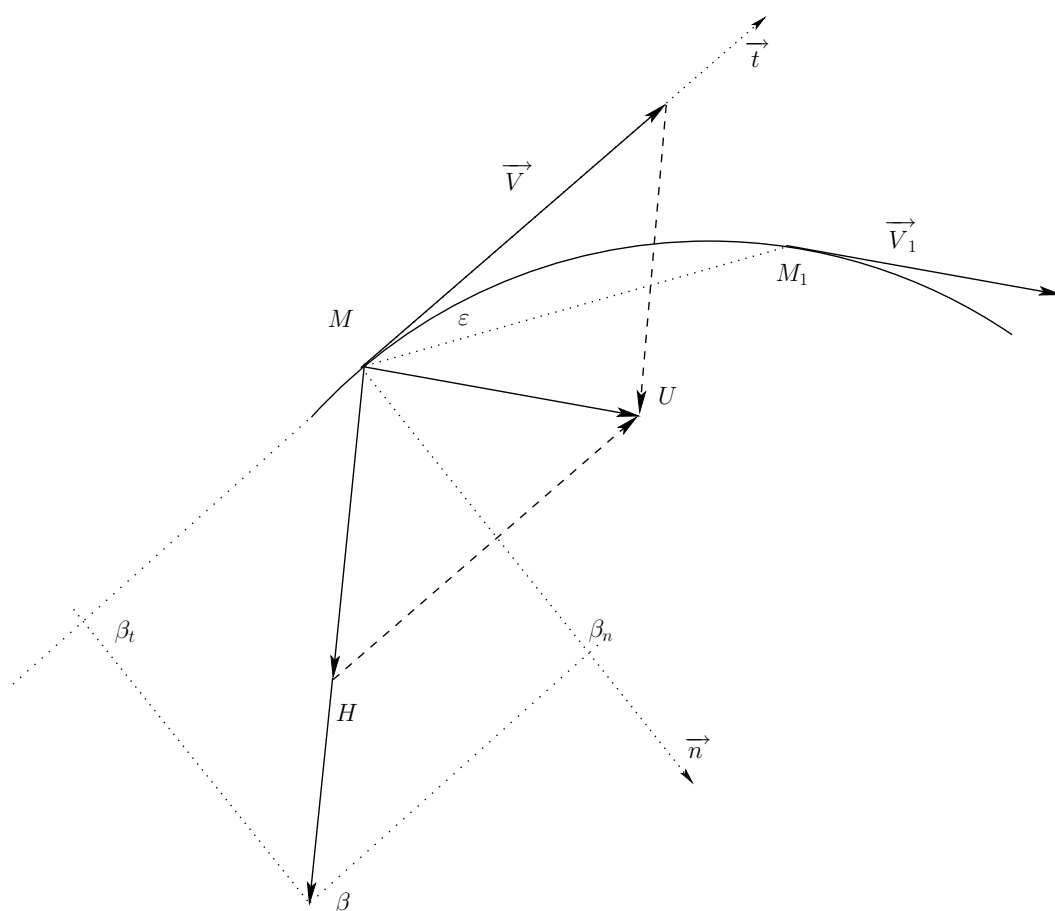


Figure 28. Cette figure n'est autre que la figure 23 sur laquelle ont été précisées les positions du vecteur tangent \vec{t} et du vecteur normal \vec{n} au point M , ainsi que les projections β_t et β_n de l'accélération moyenne entre t et $t + \Delta t$.

Pour cela, replaçons nous dans le cadre de la description horaire (10) de la trajectoire où $s = \widehat{OM}$ est une fonction du temps t .

Les coordonnées cherchées pour l'accélération s'obtiennent (figure 28) en projetant

$$\overrightarrow{M\beta} = \frac{\overrightarrow{MH}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MU} - \overrightarrow{V}}{\Delta t}$$

sur la tangente et sur la normale en M à la courbe. Si V est la projection de la vitesse en M sur \vec{t} et si $V + \Delta V$ est celle en M_1 , la projection de \overrightarrow{MH} sur \vec{t} s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{proj. } \overrightarrow{MH} \text{ sur } \vec{t} &= (V + \Delta V) \cos \varepsilon - V \\ &= \Delta V \cos \varepsilon - V(1 - \cos \varepsilon) \\ &= \Delta V \cos \varepsilon - 2V \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

où ε est l'angle entre les vitesses \vec{V} et \vec{V}_1 . L'accélération moyenne a donc pour projection sur le même axe :

$$\beta_t \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t} \cos \varepsilon - 2V \frac{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t}$$

Quand Δt tend vers 0, le premier terme du second membre tend vers dV/dt . Le second terme peut s'écrire

$$\frac{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\text{arc } MM_1} \right)^2 \frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t} \text{arc } MM_1$$

Les termes du membre de droite de l'expression ci-dessus tendent respectivement vers 1, $1/R^2$ (où R est le rayon de courbure de la courbe en M), V et 0. Le tout tend donc vers 0, et l'accélération tangentielle s'écrit

$$\gamma_t = \frac{dV}{dt}$$

À noter que cette accélération tangentielle est dirigée dans le même sens que \vec{t} .

La projection sur la normale s'obtient par un raisonnement similaire. Nous avons :

$$\text{proj. } \overrightarrow{MH} \text{ sur } \vec{t} = (V + \Delta V) \sin \varepsilon + 0 \quad \text{puisque } \vec{V} \text{ est orthogonal à la normale.}$$

Donc

$$\beta_n = (V + \Delta V) \frac{\sin \varepsilon}{\Delta t}$$

Le premier terme tend vers V et comme chaque terme de

$$\frac{\sin \varepsilon}{\Delta t} = \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\text{arc } MM_1} \frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t}$$

tend, quand Δt tend vers 0, respectivement, vers 1, $1/R$ (où R est le même rayon de courbure en M), V , l'accélération normale s'écrit

$$\gamma_n = \frac{V^2}{R}$$

et l'accélération totale en M peut s'exprimer comme

$$(32) \quad \vec{\gamma} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{dV}{dt} \vec{t} + \frac{V^2}{R} \vec{n}$$

L'équation (32) conduit directement à une relation importante liant le vecteur normal et le vecteur \overrightarrow{OM} . Nous pouvons en effet l'écrire sous la forme :

$$\vec{\gamma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (V \vec{t}) = \frac{dV}{dt} \vec{t} + V \frac{d\vec{t}}{dt}$$

d'après (16). Or, d'après (15),

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right) = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} = V \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2}$$

En reportant ce résultat dans la formule ci-dessus, puis en comparant avec (32), nous obtenons :

$$(33) \quad \frac{\vec{n}}{R} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right) = \frac{d\vec{t}}{ds}$$

Enfin, puisque, d'après (16) et (33) :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2} = \frac{dV}{dt} \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} + V^2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2}$$

nous pouvons réécrire la formule (29) donnant le rayon de courbure R au point M en fonction du paramètre s sous la forme :

$$(34) \quad R = \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|^3}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right\|} = \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\|^3}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2} \right\|}$$

ce qui est remarquable, car ce résultat montre que la notion de courbure est indépendante de la paramétrisation.

- La formule (33) montre la capacité qu'a une particule de courber sa trajectoire. Nous allons voir qu'elle peut aussi la tordre, tel un avion lorsqu'il incline ses ailes lors d'un virage. Le taux d'inclinaison, qu'on appelle torsion, correspond à la façon dont varie le plan osculateur au cours du mouvement. Ce taux peut se mesurer à partir à partir du taux de variation de la direction de la normale au plan osculateur en fonction de l'espace parcouru.

Pour évaluer ce taux, nous allons introduire une normale au plan osculateur au point M que nous appellerons *binormale* en M , et sera définie par la formule :

$$(35) \quad \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

Le vecteur correspondant a donc pour norme 1 et il est tel que les vecteurs \vec{t} , \vec{n} et \vec{b} forment un trièdre direct au point M .

Nous considérons, de façons analogue à ce qui a été fait pour les vitesses, le taux de variation des binormales correspondantes lorsque le point matériel se déplace de M à M_1 . Si \vec{b}_1 est la binormale en M_1 , ce taux s'écrit (figure 29) :

$$\frac{\vec{b}_1 - \vec{b}}{\widehat{MM_1}}$$

et nous en calculerons la limite $d\vec{b}/ds$ pour Δs tendant vers 0.

Pour évaluer

$$\vec{b}_1 - \vec{b} = \vec{t}_1 \wedge \vec{n}_1 - \vec{t} \wedge \vec{n}$$

nous utiliserons comme précédemment :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \overrightarrow{OM} + \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \Delta s + o(\Delta s) \\ \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{ds} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} + \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \Delta s + o(\Delta s) \quad \text{soit} \quad \vec{t}_1 = \vec{t} + \frac{\vec{n}}{R} \Delta s + o(\Delta s) \\ \frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{ds^2} &= \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} + \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \Delta s + o(\Delta s) \quad \text{soit} \quad \frac{\vec{n}_1}{R_1} = \frac{\vec{n}}{R} + \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \Delta s + o(\Delta s) \end{aligned}$$

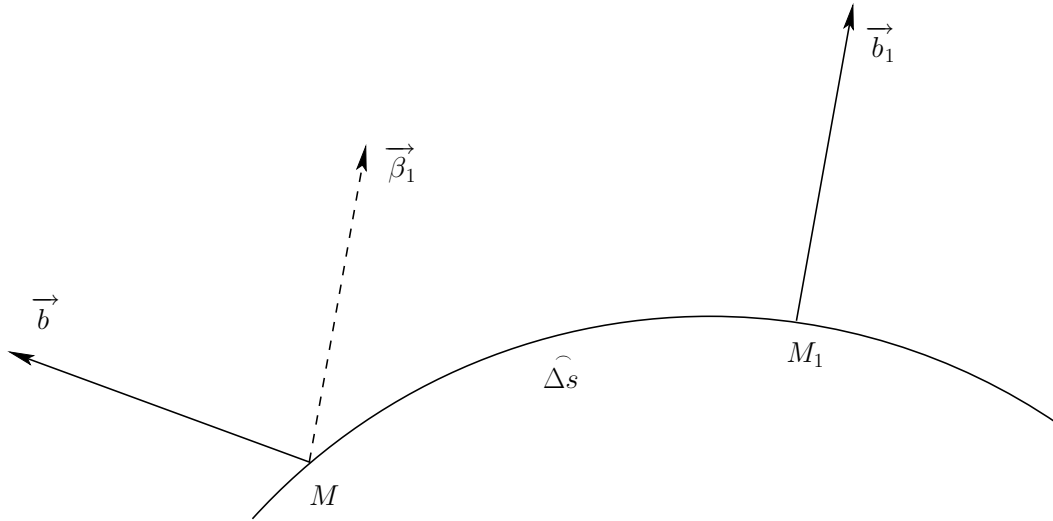


Figure 29. Introduction de la torsion. Seules les binormales sont représentées. Par définition, ce sont des vecteurs géométriques. Leurs différence se calcule en n'importe quel point. Nous avons choisi le point M .

Donc

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 - \vec{b} &= \vec{t}_1 \wedge \vec{n}_1 - \vec{t} \wedge \vec{n} \\ &= \left(\vec{t} + \frac{\vec{n}}{R} \Delta s \right) \wedge \left(\frac{R_1}{R} \vec{n} + R_1 \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \Delta s \right) - \vec{t} \wedge \vec{n} + o(\Delta s) \\ &= \left(\frac{R_1 - R}{R} \right) \vec{t} \wedge \vec{n} + R_1 \vec{t} \wedge \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \Delta s + o(\Delta s) \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$R_1 = R(s + \Delta s) = R + \frac{dR}{ds} \Delta s + \mathcal{O}(\Delta s)$$

l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\vec{b}_1 - \vec{b} = \frac{1}{R} \frac{dR}{ds} \vec{t} \wedge \vec{n} \Delta s + R \vec{t} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} \Delta s + \mathcal{O}(\Delta s)$$

Il faut donc calculer dR/ds , ce que nous ferons à partir de la formule (34) qui, en désignant par un point (\cdot) le produit scalaire usuel, et en posant :

$$v \equiv \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right) \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right) = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right\|^2$$

se simplifie en :

$$R = \frac{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\|^3}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right\|} \equiv v^{-1/2}$$

puisque $\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \vec{t}$ et que $\|\vec{t}\| = 1$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= 2 \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right) \cdot \frac{d}{ds} \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right] \\ &= 2 \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \right) \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \\ &= 2 \left(\vec{t} \wedge \frac{\vec{n}}{R} \right) \cdot \left(\vec{t} \wedge \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \end{aligned}$$

et la dérivée du rayon de courbure s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{ds} &= -1/2 v^{-3/2} \frac{dv}{ds} = - \left(\vec{t} \wedge \frac{\vec{n}}{R} \right) \cdot \left(\vec{t} \wedge \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \frac{1}{\left\| \vec{t} \wedge \frac{\vec{n}}{R} \right\|^3} \\ &= -R^3 \left(\vec{t} \wedge \frac{\vec{n}}{R} \right) \cdot \left(\vec{t} \wedge \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \\ &= -R^2 \vec{b} \cdot \left(\vec{t} \wedge \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \end{aligned}$$

puisque $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$.

Pour évaluer pratiquement $\frac{dR}{ds}$, décomposons $\frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3}$ sur la base $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$:

$$\frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} = \alpha \vec{t} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}$$

alors

$$\vec{t} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} = \beta \vec{t} \wedge \vec{n} + \gamma \vec{t} \wedge \vec{b} = \beta \vec{b} - \gamma \vec{n}$$

d'où $\frac{dR}{ds} = -R^2 \beta$ Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 - \vec{b} &= \frac{1}{R} \frac{dR}{ds} \vec{t} \wedge \vec{n} \Delta s + R \vec{t} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} \Delta s + \mathfrak{o}(\Delta s) \\ &= -R \beta \vec{t} \wedge \vec{n} \Delta s + R (\beta \vec{t} \wedge \vec{n} - \gamma \vec{t} \wedge \vec{b}) \Delta s + \mathfrak{o}(\Delta s) \\ &= -\gamma R \vec{n} \Delta s + \mathfrak{o}(\Delta s) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\vec{b}_1 - \vec{b}}{\Delta s} \rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} = -\gamma R \vec{n}$$

où γ est la projection changée de signe de $\vec{t} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3}$ sur \vec{n} .

Suivant l'usage, nous définirons la torsion par

$$(36) \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{T} \vec{n}$$

et nous avons par construction :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= R \gamma = -R \left(\vec{t} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \cdot \vec{n} \\ (37) \quad &= -R \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \wedge \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \cdot R \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2} \\ &= R^2 \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}, \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2}, \frac{d^3 \overrightarrow{OM}}{ds^3} \right) \end{aligned}$$

• Le seul vecteur dont nous n'avons pas encore calculé la dérivée est la normale principale. En partant de

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$$

nous obtenons par dérivation

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{ds} &= \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} + \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} \\ &= \frac{1}{R} \vec{b} \wedge \vec{n} - \frac{1}{T} \vec{n} \wedge \vec{t} \quad (\text{d'après 33 et 36}) \\ &= -\frac{1}{R} \vec{t} + \frac{1}{T} \vec{b} \end{aligned}$$

qui est la relation cherchée.

Trièdre de Frenet et repère mobile.

La relation ci-dessus, ainsi que les relations (33) et (36) :

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \frac{1}{R} \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= -\frac{1}{R} \vec{t} + \frac{1}{T} \vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\frac{1}{T} \vec{n} \end{aligned}$$

forment un système qui portent le nom de *formules de Frenet*. Elles sont une des réponses à la question suivante qui est à la base de la théorie dite du repère mobile : lorsqu'un mobile décrit une trajectoire, est-il possible de repérer cette dernière à partir d'un repère lié au mobile ?

Développons cette question. Soit M la représentation d'un mobile décrivant donc une trajectoire dans un espace à trois dimensions dans lequel est défini le produit scalaire usuel. Peut-on attacher à ce point un repère orthonormé particulier $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dont l'origine définira la courbe ? Les \vec{e}_i dépendent du temps t et sont supposés avoir des dérivées continues par rapport à t .

Lorsque t varie, \overrightarrow{OM} , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 varient. Soient :

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &\text{ les composantes de } \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \\ (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) &\text{ les composantes de } \frac{d\vec{e}_i}{dt}, \end{aligned}$$

dans le repère mobile $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui pour l'instant est arbitraire. Nous avons donc³² :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \xi_i \vec{e}_i \quad ; \quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} = a_{ik} \vec{e}_k \quad .$$

Si les a_{ik} et ξ_i sont connus, les équations ci-dessus forment un système différentiel linéaire grâce auquel on peut calculer les \vec{e}_i et \overrightarrow{OM} ; ce qui détermine la courbe.

Les \vec{e}_i sont inconnus ; nous allons démontrer et utiliser certaines propriétés des a_{ik} pour choisir parmi l'ensemble des possibilités celles qui nous seront les plus pratiques pour définir le repère.

- La matrice des a_{ik} est antisymétrique. En effet, de la propriété

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

³² Nous convenons de sommer de 1 à 3 les couples d'indices muets identiques (convention d'Einstein).

on déduit par dérivation

$$\vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_j}{dt} + \frac{d\vec{e}_i}{dt} \cdot \vec{e}_j = 0 \quad .$$

En remplaçant dans cette équation les $d\vec{e}_i/dt$ par leurs définitions, nous obtenons :

$$\vec{e}_j \cdot \frac{d\vec{e}_i}{dt} = a_{ik} \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k ; \quad \vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_j}{dt} = a_{jl} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_l ;$$

d'où par addition

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{e}_j \cdot \frac{d\vec{e}_i}{dt} + \vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_j}{dt} = a_{ik} \delta_{jk} + a_{jl} \delta_{il} \\ &= a_{ij} + a_{ji} \end{aligned}$$

et donc la propriété.

En en tenant compte, les équations s'écrivent maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= a_{12} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} &= -a_{12} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} &= a_{31} \vec{e}_1 - a_{23} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

avec

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \xi_i \vec{e}_i$$

Il y a donc une infinité de repères possibles qui répondent *a priori* à la question. Nous pouvons particulariser un repère en nous servant de ce que nous avons introduit puisque les vecteurs \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} , satisfaisant aux relations (38) sont une solution également du système ci-dessus. Le repère associé à ces vecteurs s'appelle *repère de Frenet*.

Pour retrouver les équations, il suffit d'imposer à ξ_1 d'être la vitesse V de la particule, de prendre pour \vec{e}_1 le vecteur unitaire \vec{t} tangent à la trajectoire en M et d'introduire, au lieu du temps t , l'abscisse curviligne s sur la trajectoire.

Il suffit ensuite de choisir \vec{e}_2 suivant la direction de $d\vec{e}_1/ds$, (soit de choisir $a_{31} = 0$) et de renommer \vec{e}_2 en \vec{n} . En posant $\vec{e}_3 \equiv \vec{b}$, ainsi que

$$\frac{a_{12}}{V} \equiv \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad \frac{a_{23}}{V} \equiv \frac{1}{T}$$

nous retrouvons bien les équations (38).

- Enfin, un peu de terminologie pour terminer
 - \vec{t} est le vecteur unitaire tangent à la courbe en M ; il est orienté dans le sens du mouvement ;

- \vec{n} est le vecteur normal principal dont le support est la *normale principale* ; il est dirigé dans la concavité de la courbe vers le centre de courbure ;
- \vec{b} est le vecteur binormal dont le support est la *binormale* ; elle est définie de façon que le trièdre $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ soit direct ;
- \vec{e}_2 et \vec{e}_3 définissent en M le *plan normal*,
- \vec{e}_3 et \vec{e}_1 , le *plan rectifiant*,
- \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , le *plan osculateur*.
- R s'appelle le *rayon de courbure* ; $1/R$, la *courbure* ;
- et T se nomme le *rayon de torsion* ; $1/T$, la *torsion*.

Le plan osculateur contient donc :

- la tangente \vec{t} ;
- la normale principale $\vec{n} = R \frac{d\vec{t}}{ds} = R \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2}$; il contient, bien sûr, et par construction, l'accélération, puisque c'est elle qui nous a servi de fil conducteur dans cette partie de ce mémoire.

- Si on connaît R et T en fonction de s , les formules de Frenet proposent donc un système d'équations différentielles linéaires dont l'intégration fournit les vecteurs \vec{t} , \vec{n} et \vec{b} en fonction de s , donc \overrightarrow{OM} en fonction de s , donc la courbe.

L'intégration de ce système contient des constantes qui sont arbitraires et dont on peut montrer que leur effet est un déplacement arbitraire ainsi qu'un changement de l'origine des abscisses curvilignes.

Autrement dit, toutes les courbes ayant le même T et le même R sont superposables ; ce sont donc des éléments intrinsèques de la courbe par rapport au groupe des invariants.

- Une remarque importante : courbure et torsion sont des propriétés géométriques d'une courbe. Elles sont indépendante de toute paramétrisation, donc de la vitesse avec la vitesse de la particule sur sa trajectoire Il est remarquable de constater qu'elles se déduisent de la seule accélération qui est une propriété physique de la trajectoire de la particule matérielle.

Les équations de Newton

Le postulat.

Dans la partie précédente, contrairement à son titre, nous n'avons évoqué la notion de force que dans son introduction, bien qu'elle soit à la source de tout ce qui y a été fait.

Nous y avons défini la notion d'accélération comme étant ce qui maintient « de force » une particule sur une trajectoire courbe. Sans cette accélération, la particule continuerait tout droit son chemin, d'un mouvement rectiligne, et à vitesse constante.

L'accélération est donc en relation directe avec la force qui la crée. C'est l'idée fondamentale de Newton³³ : « Si on fait un parallélogramme $ABCV$ sur les cordes AB et BC de deux arcs successivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des espaces non résistants, et que la diagonale BV de ce parallélogramme ait la même position que celle qu'elle a à la fin, lorsque ces arcs diminuent infiniment, cette diagonale prolongée passera par le centre de forces.³⁴ ».

En suivant ce raisonnement, comme nous l'avons fait, on conçoit fort bien que Newton ait été conduit à créer le calcul différentiel pour décrire les différentes étapes de son projet. Cette démarche, et son accomplissement, montrent, à l'évidence, son génie.

Newton imagine donc que, puisque c'est l'accélération qui rompt le principe d'inertie et qui impose à la trajectoire sa courbure et sa torsion, elle doit être créée par une force. qui agit dans le même sens. Il postule donc la proportionnalité entre force et accélération, ce qui se symbolise par la relation

$$(39) \quad \vec{F} = \text{Cte} \vec{\gamma}$$

Reste l'immense problème de définir « force » et « Cte ». À ce niveau, en effet, nous savons mesurer statiquement une force, mais nous ne savons pas d'où elle provient, ce qui la produit. Ce problème admet actuellement plusieurs propositions de réponses, dont

- les forces issues de l'interaction entre deux corps électriquement neutres ;
- les forces issues de l'interaction entre deux corps électriquement chargés ;
- les forces dites de rappel entre deux corps.

Nous ne parlerons que des premières parce qu'elles ont été introduites par Newton lui-même. Nous essaierons de rester le plus possible proche de sa pensée pour en montrer

³³ C'est, bien sûr celle que nous avons reprise dans notre étude et qui est évoquée dans la figure 21. Nous avons seulement, pour des raisons didactiques, pris la liberté de changer les lettres A, B, C, V de Newton par M, M_1, M_2, K .

³⁴ Isaac Newton, *Principia*, Section II, prop 1, cor 2.

l'universalité, c'est-à-dire son aptitude à rassembler et à faire fructifier les potentialités de son époque.

L'introduction des forces gravitationnelles dans l'esprit de Newton.

- Newton a supposé que la particule matérielle représentant une planète tournant autour du Soleil obéissait aux deux premières lois de Kepler, à savoir :
 - sa trajectoire décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil ;
 - l'aire balayée par le rayon Soleil-Planète est proportionnelle au temps.

Le mouvement de la particule est donc plan, par hypothèse, et vue sa position privilégiée, il est pratique de choisir le Soleil, donc le foyer correspondant, comme origine et de se placer en coordonnées polaires. Nous choisirons ensuite comme axe des x la droite qui passe par les foyers et comme axe des y la droite perpendiculaire à l'axe des x et telle que l'angle $(\vec{Sx}, \vec{Sy}) = \pi/2$. Les coordonnées polaires $\rho \theta$ s'en déduisent.

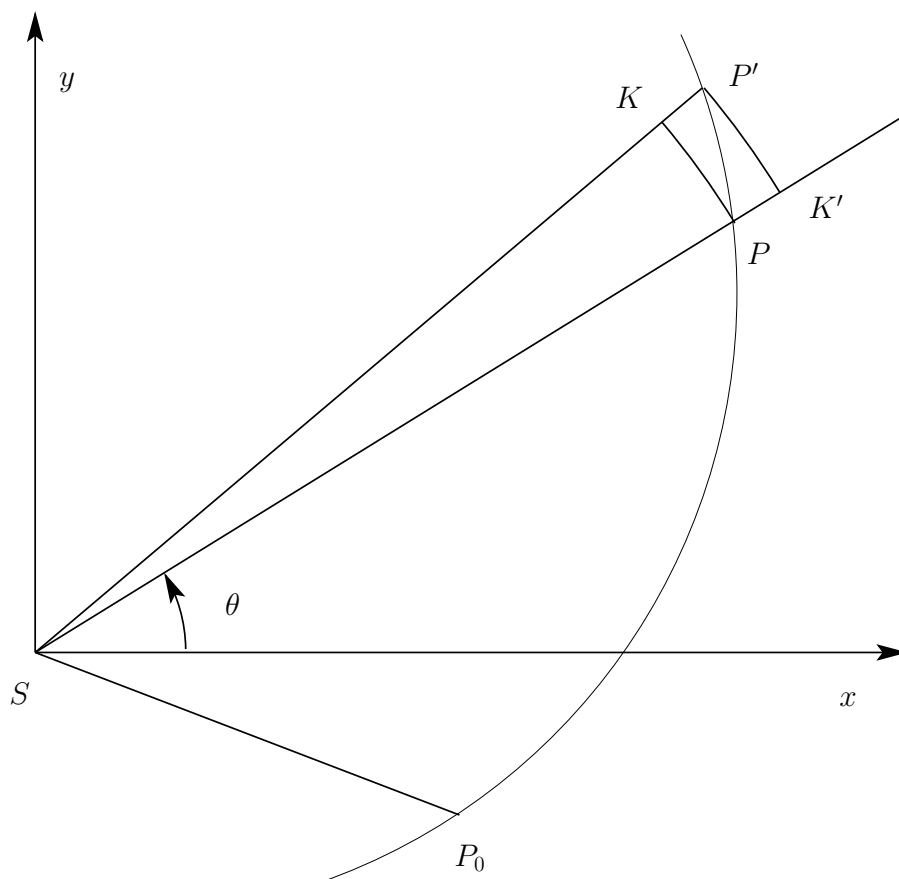


Figure 30. Loi des aires.

Soit donc une particule matérielle décrivant une courbe plane et qui se trouve en P à l'instant t (figure 30). Et soit A l'aire du secteur P_0SP balayée par le rayon SP quand la particule passe de P_0 à P . Cette aire dépend du temps et sa dérivée par rapport au

temps s'appelle, rappelons-le, vitesse aréolaire et ³⁵vaut :

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{en coordonnées polaires;} \\ &= \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad \text{en coordonnées cartésiennes;} \end{aligned}$$

• Revenons maintenant à la loi des aires : dire que l'aire balayée est proportionnelle au temps, revient à dire que :

$$A = \frac{c}{2}(t - t_0) \quad \text{donc que} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et donc que} \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = c = \text{constante.}$$

En conséquence, pour un mouvement obéissant à la loi des aires, les formules (21) et (22) montrent que la composante γ_θ de son accélération perpendiculaire à son rayon vecteur est nulle puisque

$$\gamma_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

Autrement dit, l'accélération d'un mouvement obéissant à la loi des aires est dirigée selon le rayon vecteur (\overrightarrow{SP}).

• Remarque 1.

La propriété ci-dessus se démontre aussi facilement à partir de la formulation cartésienne de la loi des aires

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{constante}$$

³⁵ Comme pour le calcul des longueurs d'arc de courbe, nous laissons le lecteur intéressé se tourner vers les mêmes ouvrages s'il souhaite approfondir le calcul des aires des surfaces. Cela dit, la formule (40) est relativement intuitive dans le sens suivant :

Lorsque t croît de t à $t + \Delta t$, le point représentatif passe de P de coordonnées (ρ, θ) à P' de coordonnées $(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$ et l'aire augmente de

$$\Delta S = \text{aire du secteur } PSP' \quad .$$

Introduisons les cercles de centre S , de rayons SP et SP' ; ils coupent les rayons vecteurs en K et K' (figure 30) et fournissent les inégalités

$$\frac{1}{2}\rho^2 \Delta\theta < \Delta A < \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\theta$$

qui sont « évidentes » géométriquement.

En divisant par Δt et en passant à la limite, on « trouve » la formule (39). Mais la véritable démonstration est nettement plus longue. Par contre, le passage aux coordonnées cartésiennes se fait simplement à partir des formules de transformations inverses :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

qui donne par dérivation

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

qui indique bien que l'accélération est proportionnelle au rayon vecteur.

- Remarque 2.

Réciproquement, si un point matériel se déplace dans l'espace de sorte que le support de son accélération passe par un point fixe, la courbe associée à la trajectoire est plane et le mouvement obéit à la loi des aires.

Pour démontrer cette proposition, il nous suffit de prendre le point fixe comme origine des axes et d'écrire que \overrightarrow{OM} et $d^2 \overrightarrow{OM} / dt^2$ sont proportionnels, soit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad \text{d'où nous déduisons} \quad \begin{aligned} y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \\ x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

puis par intégration

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= A \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= B \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= C \end{aligned}$$

Ces trois équations, par combinaison linéaire, donnent

$$Ax + By + Cz = 0$$

qui est bien l'équation d'un plan contenant la trajectoire et passant par le point fixe. Pour vérifier que cette trajectoire obéit à la loi des aires, il suffit de prendre son plan comme plan des xy ; l'équation

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$$

indique alors que la vitesse aréolaire est bien constante. Q.E.D.

- Nous sommes maintenant en mesure de donner des informations sur les forces intervenant dans le mouvement d'un point matériel qui obéit aux deux premières lois de Kepler; la particule décrit un mouvement plan, une ellipse, selon la loi des aires

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = c \quad .$$

Nous supposons, comme ci-dessus, que les axes sont rapportés au foyer de l'ellipse où se trouve le Soleil et nous venons de voir que son accélération, à chaque instant, passe par ce point ; elle vaut (21) :

$$\gamma_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Choisissant θ comme variable indépendante, nous avons

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{c}{\rho^2} = -c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

d'après la loi des aires. De même

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = -c \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{c^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

ce qui permet d'écrire l'accélération sous la forme³⁶ :

$$\gamma_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

Il ne reste plus qu'à introduire dans cette formule le fait que la trajectoire est une ellipse, c'est-à-dire que ρ satisfait à l'équation :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad \text{avec} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad e = \frac{c}{a}$$

p est le paramètre de la conique, e son excentricité. Dans notre cas, l'excentricité est inférieure à 1 (ellipse), mais le résultat est, en réalité le même pour une trajectoire hyperbolique ou parabolique, ce que, bien sûr, Newton avait vu.

En reportant ces valeurs dans l'accélération, nous obtenons :

$$\gamma_\rho = \frac{c^2}{p\rho^2}$$

elle est donc inversement proportionnelle à $1/\rho^2$.

Conséquence : si nous admettons que la force est proportionnelle à l'accélération (39), dans le cas d'une planète obéissant aux lois de Kepler, cette force variera en raison de l'inverse du carré de la distance entre la planète et le Soleil.

C'est le résultat que nous voulions présenter et qui clôt cette étude. Il semble bien que Newton n'était pas le seul sur la piste de cette loi dans l'étude du mouvement des

³⁶ Cette formule porte le nom de *formule de Binet*. Elle est particulièrement bien adaptée à des calculs de ce genre.

planètes, mais il est le seul à avoir postulé que cette loi était universelle et pouvait s'appliquer, non seulement aux planètes, mais à deux corps quelconques.

Son génie s'était montré et la mécanique "newtonienne" pouvait se construire. Mais ceci est une autre histoire qui n'entre pas dans le propos de ce travail.

Remerciements.

Je tiens à remercier très sincèrement Claude Piquet de l'université Pierre et Marie Curie (Paris6) pour les nombreux échanges constructifs que nous avons eus lors de l'élaboration de ce travail, ainsi que pour les non moins nombreuses critiques qu'il a faites lors de sa rédaction : le texte ci-dessus lui doit beaucoup.