CAHIERS D'ENSEIGNEMENT

Étude et tracé des courbes du type

f(x,y) = 0

Michel Karatchentzeff

VERSION 2.0 — MARS 2005
FASCICULE X

Ce fascicule correspond à une partie d'un cours donné de 1984 à 2004 à l'université Pierre et Marie Curie de Paris dans le cadre de la maîtrise de Physique et Applications.

Éditions successives

- version 1.0 année 2002
- version 1.1 année 2003
- version 1.2 année 2004
- version 2.0 année 2005

Étude et tracé des courbes du type $f(x, y) = 0$

Les courbes dont nous parlerons dans ce fascicule seront définies par une relation f entre les coordonnées x et y d'un point M du plan. La base dans laquelle sont évaluées ces coordonnées est supposée orthonormée. La relation f est donc une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et nous supposerons qu'il n'est, en général, pas possible de calculer explicitement y en fonction de x.

En pratique, il n'existe pas *a priori* d'algorithme d'étude d'une courbe du type $f(x, y) = 0$. Comme dans le cas du théorème des fonctions implicites qui apparaîtra régulièrement tout au cours de ce chapitre, il faudra connaître au moins un point de la courbe pour en faire l'étude au voisinage de ce point ; c'est à partir de ce dernier et des propriétés de la fonction f que nous pourrons nous poser un certain nombre de questions (la courbe passe-t-elle une ou plusieurs fois par ce point ? la courbe possède-t-elle une tangente en ce point ? Le point est-il ou non à l'infini,...)

Une réponse immédiate à ces questions est loin d'être aisée, mais l'expérience montre qu'après avoir étudié très soigneusement
- le domaine d'existence de la fonction,
- ses périodes,
- ses symétries,[1]

il est possible de dégager une approche grossière de son étude de en trois étapes :
1. la recherche, puis l'étude de points dits *singuliers* pour pouvoir aborder le comportement de la fonction au voisinage de ces points ;
2. l'étude du comportement asymptotique de la fonction ;
3. et enfin, tenter de comprendre le raccordement des deux premières étapes.

Le dernier point sera bien évidemment le moins évident, car il dépendra des deux premiers et *des propriétés que l'on aura su découvrir de la fonction.* Comme il est impossible de spéculer dessus, nous nous contenterons de donner quelques méthodes générales (méthode de la sécante, des régions,...) permettant de compléter nos connaissances de la courbe sans chercher à présenter quoi que ce soit de systématique : la qualité des résultats de l'étude d'une courbe dépend très souvent de l'expérience, de l'instinct de celui qui la trace.

[1] Si pour tout point de son domaine de définition, de coordonnées (x, y), f satisfait à :
- ◇ $f(-x, -y) = f(x, y)$, la courbe est symétrique par rapport à l'origine ;
- ◇ $f(-x, y) = f(x, y)$, la courbe est symétrique par rapport à Oy ;
- ◇ $f(x, -y) = f(x, y)$, la courbe est symétrique par rapport à Ox ;
- ◇ $f(y, x) = f(x, y)$, la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice ;
- ◇ $f(-y, -x) = f(x, y)$, la courbe est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice ;

Les points 1 et 2 sont d'un abord plus facile, ne serait-ce que parce qu'il est souvent possible dans ces deux cas de simplifier les expressions (développements limités, parties principales,...), ce qui rend souvent les calculs, sinon aisés, du moins faisables.

Plan tangent en un point d'une surface – tangente en un point d'une courbe.

La notion de tangente est très importante dans l'étude d'une courbe, ne serait-ce que parce qu'une courbe peut-être considérée presque partout comme l'enveloppe de ses tangentes. Nous allons donc commencer par rappeler la définition précise d'une tangente en un point d'une courbe, et comme cela ne présente aucune difficulté supplémentaire, nous nous placerons dans $\mathbb{R}^N$.

DÉFINITION :

Une base étant donnée dans un espace de dimension finie N, considérons une application à valeurs réelle définie dans cet espace à laquelle sera associée une surface par la relation $f(x_1, \ldots, x_N) = 0$ qui peut s'écrire encore symboliquement $f(M) = 0$ et dans laquelle x, y, ... sont les coordonnées dans la base d'un point M de l'espace.

Soit M_0, un autre point de cette surface ; il satisfera donc à $f(M_0) = 0$ et nous admettrons que f admet en M_0 des dérivées partielles continues.

Le plan tangent en M_0 à la surface $f(M) = 0$ est, par définition, le noyau de $(\operatorname{grad} f)_{M_0}$ rapporté en M_0.

Autrement dit, si $\overrightarrow{M_0M}$ est un vecteur issu de M_0, le plan tangent en M_0 à la surface $f(M) = 0$ est par définition $\left\{\overrightarrow{M_0M} \;\middle|\; (\operatorname{grad} f)_{M_0}(\overrightarrow{M_0M}) = 0\right\}$

Une base étant donc choisie, nous écrirons abusivement

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad ; \quad M_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \cdots \\ x_{0,N} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\operatorname{grad} f)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(M_0) \right)$$

et l'équation du plan tangent sera :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(M_0) \right) \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} \\ \cdots \\ x_N - x_{0,N} \end{pmatrix} = 0$$

M représente alors le 'point courant' du plan tangent.

APPLICATION : équation de la tangente en (x_0, y_0) d'une courbe dans le plan :

Dans le plan, il est plus pratique d'utiliser la notation x et y pour désigner les coordonnées plutôt que x_1 et x_2.

Si la courbe est donnée de façon implicite ($f(x, y) = 0$), l'application de la définition ci-dessus donne simplement :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Si la courbe est définie de façon explicite ($y = \phi(x)$), il est aisé de se ramener au cas précédent en posant :

$$f(x, y) = y - \phi(x) = 0 \qquad\qquad y_0 = \phi(x_0)$$

et nous pouvons écrire successivement :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\, -\phi'(x_0), 1\,) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$y - y_0 = \phi'(x_0)(x - x_0)$$

La comparaison des deux dernières équations redonne le résultat bien connu du théorème des fonctions implicites, si $(\partial f / \partial y)(x_0, y_0) \neq 0$

$$\phi'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

L'interprétation géométrique se déduit de :

$$\phi'(x_0) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h}}_{x_0 + h - x_0}$$

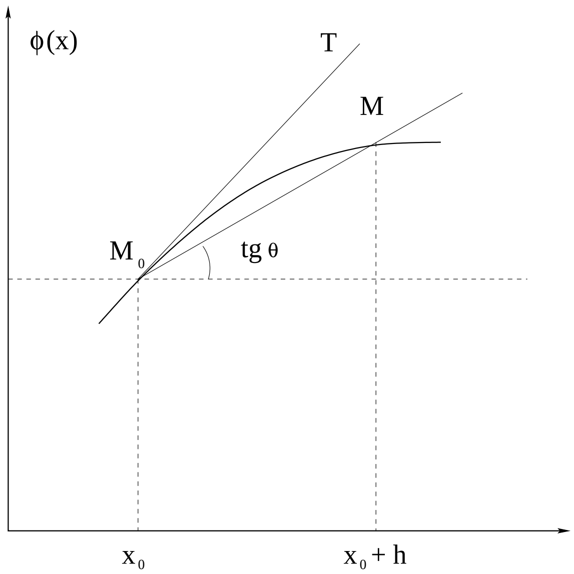


Figure 1. Interprétation géométrique de la tangente.

Si x et y sont les coordonnées d'un point courant de la sécante, l'équation de cette dernière s'écrit :

$$y - y_0 = \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h}\,(x - x_0)$$

ce qui devient, lorsque h tend vers 0 :

$$y - y_0 = \phi'(x_0)\,(x - x_0)$$

$\phi'(x_0)$ s'interprète donc comme la pente de la tangente en M_0 à la courbe, $\tan\theta$, et la tangente en M_0 à la courbe $y = \phi(x)$ s'interprète comme la limite de la sécante M_0M lorsque M tend vers M_0 en restant sur la courbe.

Les abscisses des points d'intersection de deux courbes, $y = \phi(x)$ et $y = \psi(x)$ sont évidemment les racines en x de l'équation $\phi(x) = \psi(x)$. Une racine x_0 de cette dernière équation sera dite d'ordre p si p est la plus grande valeur telle que l'équation $\phi(x) = \psi(x)$ puisse s'écrire sous la forme $(x - x_0)^p\xi(x) = 0$ avec $\xi(0) \neq 0$. Le point d'intersection correspondant, de coordonnées $x_0, \phi(x_0) = \psi(x_0)$ sera également dit d'ordre p (il sera aussi dit simple si $p = 1$, double si $p = 2$, triple si $p = 3,\ldots$).

Évaluons maintenant l'ordre du point d'intersection M_0 de la courbe et de la sécante M_0M. Il se déduit de l'équation des abscisses des intersections :

$$\phi(x) = y_0 + \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h}\,(x - x_0)$$

où $y_0 = \phi(x_0)$; si la fonction ϕ admet un développement de Taylor au voisinage de x_0 :

$$\phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\phi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \mathrm{o}(x - x_0)^2 = \phi(x_0) + \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h}\,(x - x_0)$$

Après simplification, cette équation se met sous la forme :

$$(x - x_0)\Big[\phi'(x_0) - \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} + \frac{\phi''(x_0)}{2}(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)\Big] = 0$$

Le terme entre crochets ne s'annulant pas pour $x = x_0$, le point d'intersection en M_0 de la courbe et de la sécante est un point simple. (point d'ordre 1).

La même recherche sur le point d'intersection de la courbe et de sa tangente conduit à l'équation :

$$\begin{aligned}\phi(x_0) + \phi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\phi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{\phi'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3\,\mathrm{o}(x - x_0)^3 \\ = \phi(x_0) + \phi'(x_0)\,(x - x_0)\end{aligned}$$

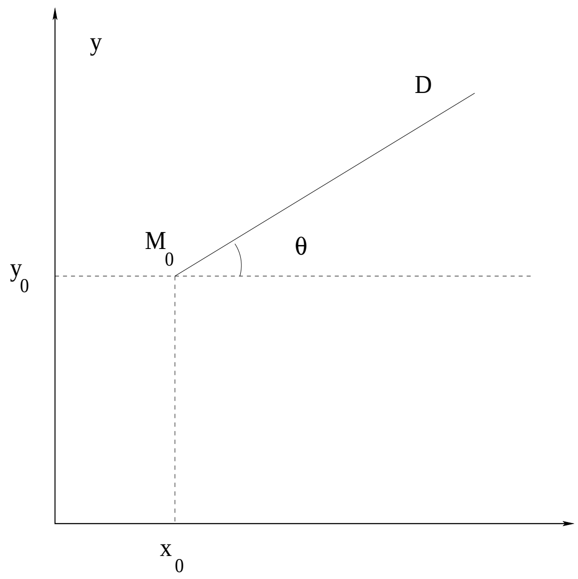
soit, après simplification :

$$(x - x_0)^2\Big[\frac{\phi''(x_0)}{2} + \frac{\phi'''(x_0)}{6}(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)\Big] = 0$$

Comme $\phi''(x_0)$ n'est en général pas nul, le terme entre crochets ne s'annule pas pour $x = x_0$ et le point d'intersection en M_0 et sa tangente est d'ordre 2. Cette situation est compatible avec la définition géométrique de la tangente qui ramène le point M sur le point M_0 et fait coïncider les deux points.

C'est à partir de cette remarque (l'intersection d'une droite et d'une courbe est en général un point simple, sauf si la courbe est tangente auquel cas, elle devient au moins double) que se bâtit la théorie du tracé d'une courbe.

Principe de l'étude d'une courbe en un de ses points.



Soit une courbe (C) définie par l'équation $f(x,y)=0$.

Soit M_0 un point de la courbe de coordonnées (x_0, y_0) ;

On a : $f(x_0,y_0)=0$

Figure 2.

Le principe de base de l'étude de la courbe (C) dans un voisinage de M_0 est simple :

- faire passer une droite par M_0,
- calculer ensuite le nombre de points d'intersection en M_0 de cette droite avec la courbe,
- interpréter le résultat.

Algébriquement, les équations de la droite s'écrivent :

$$(D) \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \rho\cos\theta \equiv x_0 + \alpha\rho \\ y &= y_0 + \rho\sin\theta \equiv y_0 + \beta\rho \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$$

Le nombre de points de rencontre (d'intersection) de (C) et de (D) en M_0 est donc déterminé par le nombre de racines réelles ρ nulles de l'équation :

$$f(x_0+\alpha\rho, y_0+\beta\rho) = 0$$

Supposons (formule de Taylor - Lagrange) que

– f est définie dans un voisinage ouvert V du point $M_0(x_0, y_0)$ dans lequel toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ existent et sont continues dans V,

– les dérivées n-èmes existent dans V ;

une base étant choisie, $u = (a, b)$ et $v = (h, k)$, il existe un nombre réel θ $(0 < \theta < 1)$ tel que

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = f(x_0, y_0)& \\ &+ \rho[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)] \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{\rho^n}{n!}[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)]^{[n]} \\ &+ \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}[\alpha f'_x(x_0 + \theta\alpha\rho, y_0 + \theta\beta\rho) + \beta f'_y(x_0 + \theta\alpha\rho, y_0 + \theta\beta\rho)]^{[n+1]} \end{aligned}$$

en utilisant la notation symbolique et où $f'_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Comme nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe au voisinage de M_0, il est possible de remplacer l'étude de la fonction par celle du développement de Taylor dans lequel le dernier terme (le reste) a été négligé.

Le premier terme étant nul par hypothèse, il faut donc étudier les solutions $\rho = 0$ du polynôme :

$$\rho[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)] + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)]^{[n]} = 0$$

Pour illustrer la discussion, nous nous contenterons de faire l'étude pour $n = 3$.

$$\begin{aligned} \rho[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)] + \frac{\rho^2}{2}[\alpha^2 f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2\alpha\beta f''_{xy}(x_0, y_0) + \beta^2 f''_{y^2}(x_0, y_0)]& \\ + \frac{\rho^3}{3!}[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)]^{[3]} = 0& \end{aligned}$$

• En général, $f'_x(x_0, y_0)$ et $f'_y(x_0, y_0)$ ne sont pas simultanément nuls, et pour une droite donnée (α et β choisis) $\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

La racine $\rho = 0$ est donc racine simple de l'équation ; la droite ne coupe la courbe en M_0 qu'une seule fois. Le point M_0 est dit point simple (ou point régulier) de la courbe.

Maintenant, avec les mêmes hypothèses, α et β peuvent être choisis tels que :

$$\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0) = 0$$

ce qui détermine le rapport

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

si $f'_y(x_0,y_0)$ est différent de 0 (dans le cas contraire, il suffit de choisir α nul et $\beta = 1$)
Cette valeur, reportée dans l'équation de la droite (D), donne

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} \qquad\qquad y - y_0 = \frac{\beta}{\alpha}(x-x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

soit encore

$$(y-y_0)f'_y(x_0,y_0) + (x-x_0)f'_x(x_0,y_0) = 0$$

qui n'est autre que l'équation de la tangente en M_0 à la courbe (C).
D'où (figure 1) l'interprétation géométrique :

– la tangente à la courbe (C) en un point simple (régulier) coupe la courbe deux fois en ce point (si le second terme ne s'annule pas) ;

– elle est définie par sa pente

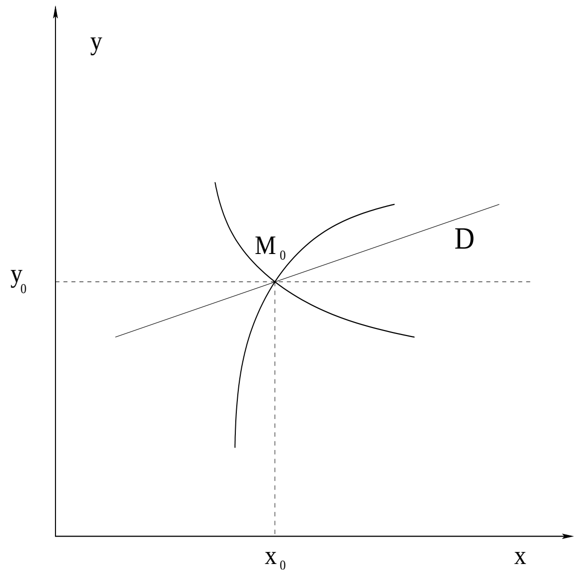
$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$$

– si $f'_x(x_0,y_0) = 0$ en M_0, la tangente est horizontale ;

– si $f'_y(x_0,y_0) = 0$, la tangente est verticale.

• Si maintenant en M_0 $f'_x(x_0,y_0) = 0$ et $f'_y(x_0,y_0) = 0$ (en supposant que le troisième terme ne s'annule pas), l'équation à étudier devient :

$$\frac{\rho^2}{2}[\alpha^2 f''_{x^2}(x_0,y_0) + 2\alpha\beta f''_{xy}(x_0,y_0) + \beta^2 f''_{y^2}(x_0,y_0)] + \frac{\rho^3}{3!}[\alpha f'_x(x_0,y_0) + \beta f'_y(x_0,y_0)]^{[3]} = 0$$



En général, pour α et β donnés, $\rho = 0$ est racine double : la droite D coupe deux fois la courbe ; la courbe passe deux fois en M_0 : il y a alors deux “branches” de la courbe passant par M_0.

Figure 3. La droite D coupe deux fois la courbe en M_0.

En effet, il suffit de mettre le terme en ρ^2 de l'équation ci-dessus sous la forme :

$$\frac{\rho^2}{2!}\alpha^2 f''_{y^2}(x_0, y_0)\left[\frac{\beta}{\alpha} - \operatorname{tg}\theta_1\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} - \operatorname{tg}\theta_2\right] + \frac{\rho^3}{3!}\left[\cdots\right]^{[3]} = 0$$

ce qui conduit en négligeant le terme en ρ^3 à l'équation :

$$\left[\frac{\beta}{\alpha} - \operatorname{tg}\theta_1\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} - \operatorname{tg}\theta_2\right] = 0$$

qui s'écrit en tenant compte de la définition de β/α

$$\left[\frac{y - y_0}{x - x_0} - \operatorname{tg}\theta_1\right]\left[\frac{y - y_0}{x - x_0} - \operatorname{tg}\theta_2\right] = 0$$

Il y a donc bien décomposition de la courbe localement (le reste a été négligé) et les deux droites passant par M_0 qui l'approchent correspondent aux tangentes aux deux branches de la courbe. Si les racines ne sont pas réelles, le même calcul peut se faire : les pentes des droites sont imaginaires, mais elles se coupent en un point réel M_0 qui est alors isolé.

Le point M_0 est dit “point singulier double” dans le premier cas, “point singulier isolé” dans le second.

Si le terme que nous venons d'étudier était identiquement nul, il faudrait commencer l'étude par le premier terme non identiquement nul dans le même esprit de ce qui vient d'être fait ci-dessus.

D'autres situations peuvent se rencontrer ; elles sont schématisées sur les figures suivantes :

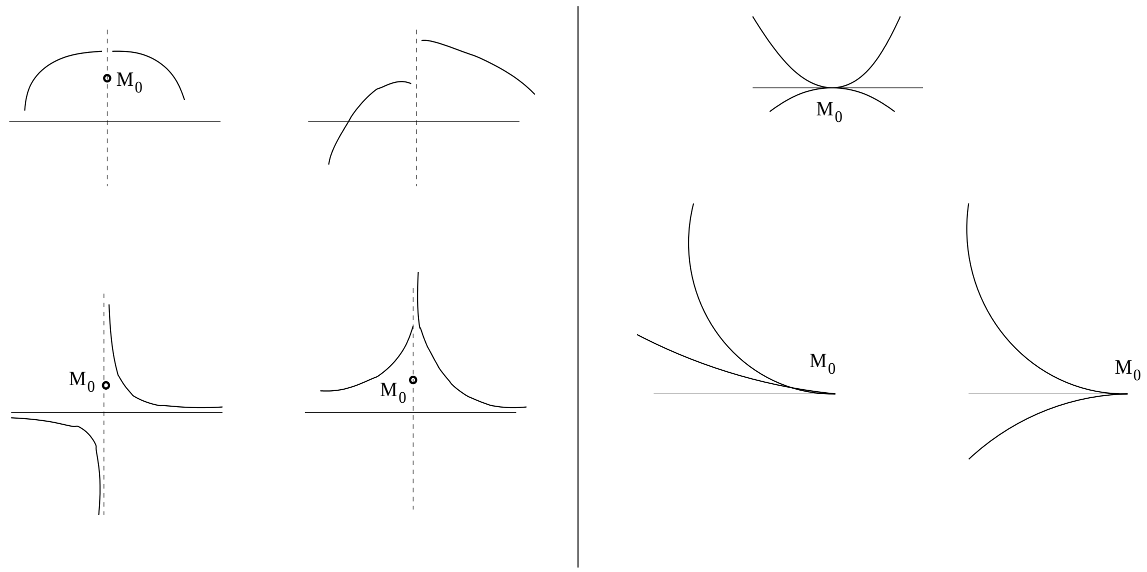


Figure 4. Singularités dites de “première espèce” (figures de gauche) et de “seconde espèce” (figures de droite). Pour ces dernières, appelés aussi “points de rebroussement,la droite qui “porte” la singularité a été choisie parallèle à l'axe des abscisses par simple commodité ; en pratique, elle peut prendre n'importe quelle direction.

• Avant de montrer un exemple, il est souhaitable de codifier quelque peu la terminologie.

DÉFINITIONS :

Un point M_0 de la courbe définie par l'équation $f(x,y)=0$ est dit simple *(régulier) si f'_{x_0} et f'_{y_0} ne sont pas simultanément nuls en ce point.*
Au contraire, il est dit singulier *si $f'_{x_0}(x_0,y_0)=f'_{y_0}(x_0,y_0)=0$.*
En conséquence, un point singulier doit vérifier simultanément les équations :

$$f(x_0,y_0)=0 \qquad f'_{x_0}(x_0,y_0)=0 \qquad f'_{y_0}(x_0,y_0)=0$$

Ces points seront donc en général peu nombreux ; il faudra donc les recenser et les étudier tout particulièrement.
Contre exemple : $f(x,y)=[g(x,y)]^2=0$. En tout point où f est nul, f'_x et f'_y sont nuls. Mais c'est un cas de style qu'il ne faut bien entendu considérer qu'après avoir fait l'étude complète de la courbe $g(x,y)=0$.

EXEMPLE : LA STROPHOÏDE.

$$f(x,y)=(x^2+y^2)x-(x^2-y^2)a=0$$

a est un nombre réel positif ; les points singuliers sont les solutions communes de :

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=(x^2+y^2)x-(x^2-y^2)a=0\\
&f'_x(x,y)=3x^2-2ax+y^2=0\\
&f'_y(x,y)=2y\,(x+a)=0
\end{aligned}$$

$(x=0,y=0)$ est une solution évidente, et est donc un point singulier. Nous pourrions vérifier par le calcul que c'est le seul ; mais ce n'est pas la peine, car s'il y avait deux points singuliers, la droite joignant ces points couperait la courbe en au moins quatre points. C'est impossible car la courbe est du troisième degré, sauf si la droite fait partie de la courbe, autrement dit si la courbe se décomposait en une droite et une parabole passant toutes deux par les points doubles ; ce n'est pas le cas.

Pour étudier cette courbe à l'origine, c'est-à-dire au point singulier, nous allons reprendre pas à pas la méthode que nous venons de proposer : l'étude du nombre de points d'intersection à l'origine de la courbe avec une droite quelconque passant par l'origine.

$$x=\alpha\rho \qquad y=\beta\rho$$

Il est toujours possible de faire un développement limité pour ρ petit, mais il est plus simple de remplacer directement x par $\alpha\rho$ et y par $\beta\rho$ en se servant de l'unicité du développement de Taylor-Lagrange puisque f est un polynôme. Ce qui donne :

$$f(\alpha\rho,\beta\rho)=-a(\alpha^2-\beta^2)\rho^2+\alpha(\alpha^2+\beta^2)\rho^3$$

La plus basse puissance de ρ est 2 : la courbe possède deux branches à l'origine dont la première approximation (les tangentes) est formée de droites de pente

$$\alpha^2 = \beta^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \pm 1$$

Ce sont les bissectrices principales du plan.

Principe de l'étude d'une courbe au voisinage d'un de ses points.

L'étude précédente étant supposée faite, nous savons à quel type de point nous avons affaire.

1. Le point est simple.

Le théorème des fonctions implicites s'applique :
– $f(x, y) = 0$ et $f(x_0, y_0) = 0$,
– f est continue dans un voisinage de (x_0, y_0),
– f'_y existe, $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$,
– f'_x existe [2].

Dans ces conditions, il existe une fonction unique ϕ définie dans un voisinage de x_0 telle que $y_0 = \phi(x_0)$, et il existe un voisinage de (x_0, y_0) dans lequel $f(x, \phi(x)) \equiv 0$, et

$$\phi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

Si, de plus, f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n dans un voisinage de (x_0, y_0), ϕ admet un développement limité jusqu'au même ordre.
Enfin, si f est algébrique (avec toujours $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$), ϕ admet alors un développement limité à tout ordre en x_0.
C'est évidemment cette dernière propriété qui sera largement utilisée.

Exemple : étude au voisinage de l'origine de la courbe :

$$f(x, y) = y - x + (y + x)(y - 2x) + y^3 = 0$$

L'origine est un point simple de la courbe car :

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 0 \\
&f'_x(x, y) = -1 - y - 4x \quad \text{d'où} \quad f'_x(0,0) = -1 \\
&f'_y(x, y) = 1 + 2y - x + 3y^2 \quad \text{d'où} \quad f'_y(0,0) = 1
\end{aligned}$$

[2] Cette dernière condition n'est pas obligatoire, mais permet d'affirmer l'existence de la dérivée de la fonction implicite.

D'après ce qui vient d'être vu, f définit donc implicitement y en fonction de x dans un voisinage de l'origine, et comme f est de plus algébrique, y admet un développement à tout ordre en x ; en particulier :

$$y = \phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

La courbe passant par l'origine, $a_0 = 0$, et l'application du théorème des fonctions implicites fournit :

$$a_1 = \phi'(0) = -\frac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = 1$$

Ce résultat aurait également pu être trouvé en reportant ϕ dans $f(x, y)$ et en identifiant ; c'est ce qui va être fait pour calculer a_2.

$$\phi(x) = x + a_2 x^2 + o(x^2) \qquad \text{d'où}$$

$$f(x,y) = x + a_2x^2 + o(x^2) + (x + a_2x^2 + o(x^2) + x)(x + a_2x^2 + o(x^2) - 2x) \\ + (x + a_2x^2 + o(x^2))^3 = 0$$

ce qui se simplifie en

$$a_2x^2 - 2x^2 + o(x^2) = 0 \quad \text{fournissant} \quad a_2 = 2$$

Au voisinage de l'origine, la courbe se comporte donc (à $o(x^2)$ près) comme

$$y = x + 2x^2$$

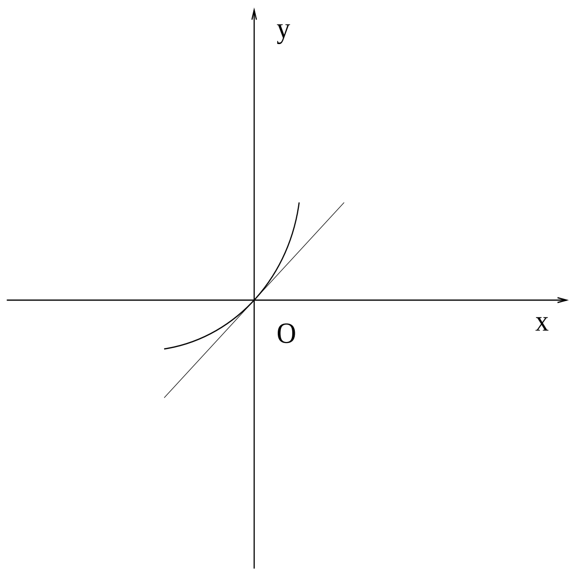


Figure 5. $f(x, y) = y - x + (y + x)(y - 2x) + y^3 = 0$ dans un voisinage de l'origine.

ce qui démontre que la courbe est bien à l'origine tangente à la première bissectrice et que sa concavité est tournée vers le haut.

Remarque : si a_2 avait été nul, il aurait fallu pousser le calcul d'au moins un ordre de grandeur de plus.

2. Le point est singulier.

La méthode à employer se rattache à la précédente : se transporter au point singulier, puis regarder (paramétrisation) s'il est possible que la courbe ait un comportement du type :

$$y(x) = t(x)\, x^{\gamma} \quad \text{ou plus simplement} \quad y(x) = t(0)\, x^{\gamma}$$

Si la réponse est positive, nous serons ramenés sur chaque branche à une étude du type précédent (point simple).

Exemple de la strophoïde :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)x - (x^2 - y^2)a = 0$$

dont il a déjà été montré qu'elle possède un point multiple (double) à l'origine ; nous n'aurons donc pas besoin de faire un changement de variable pour nous placer sur la singularité.

Essayons le changement de variable $y = t(x)\, x^{\gamma}$ pour obtenir une représentation (paramétrisation) dans laquelle chaque branche de la courbe ne sera plus singulière. Ici, cela donne :

$$f(x, y) = (x^2 + t^2x^{2\gamma})x - (x^2 - t^2x^{2\gamma})a = 0$$

ce qui se simplifie en choisissant $\gamma = 1$ en

$$-a(1 - t^2)x^2 + x^3(1 + t^2) = 0$$

puis, après division par x^2 (on dit que la courbe se désingularise) en :

$$-a(1 - t^2) + x(1 + t^2) = 0$$

Quand x tend vers 0, cette égalité doit rester satisfaite, il faut donc que $t = \pm 1$, ce qui détermine une paramétrisation de chaque branche :

$$x = a\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,; \quad y = tx$$

Le comportement s'en déduit :

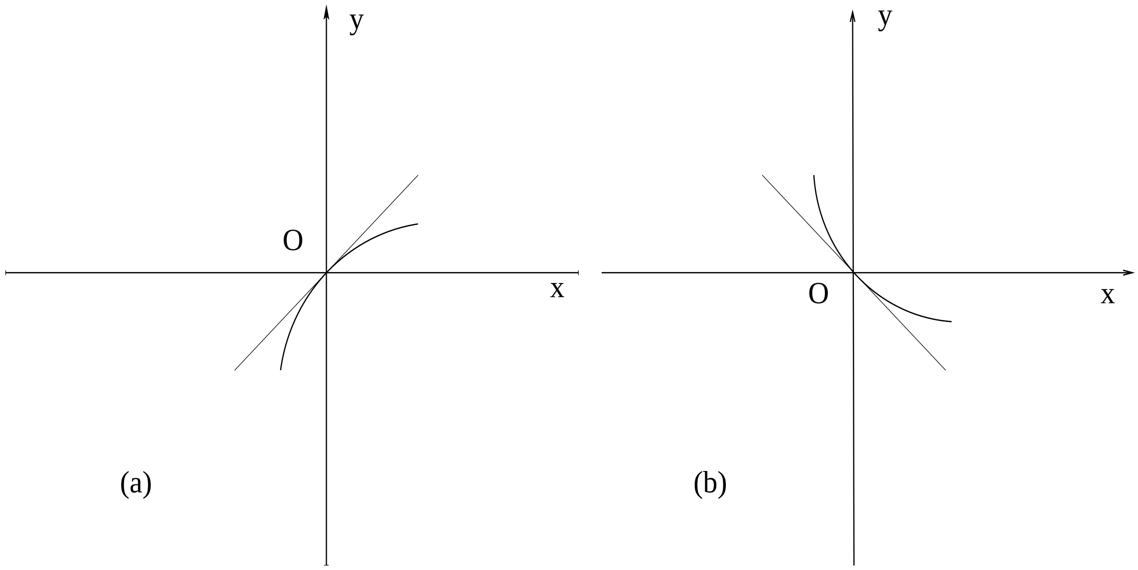


Figure 6. $f(x,y)=(x^2+y^2)x-(x^2-y^2)a=0$ dans un voisinage de l'origine.

1. En posant $t=1+h$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} x &= -a\frac{h(2+h)}{2+2h+h^2} = -a\frac{h(1+h/2)}{1+h+h^2/2} \\ &= -ah\Big(1-\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h^2)\Big) \end{aligned}$$

ce qui, combiné avec

$$y=tx=(1+h)x$$

fournit une paramétrisation locale de la branche.

Il peut être plus commode d'éliminer cette paramétrisation pour tracer le comportement local. $x=-ah+\mathrm{o}(h^2)$ permet d'écrire

$$y=(1+h)x=x\Big(1-\frac{x}{a}+\mathrm{o}(x^2)\Big)$$

2. De même, $t=-1+h$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} x &= ah\frac{(1-h/2)}{1-(h-h^2/2)} \\ &= ah\Big(1+\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h^2)\Big) \end{aligned}$$

ce qui, combiné avec

$$y=tx=(-1+h)x=x\Big(-1+\frac{x}{a}+\mathrm{o}(x^2)\Big)$$

donne l'allure de la courbe.

Remarque :

Dans l'équation

$$-a(1-t^2)+x(1+t^2)=0$$

il est également possible d'exprimer t en fonction de x en appliquant le théorème des fonctions implicites ; en posant $\varepsilon=\pm 1$ et

$$t=\varepsilon+a_1x+a_2x^2+\circ(x^2) \quad \text{par exemple}$$

et en reportant dans l'équation, nous obtenons

$$(2a\varepsilon a_1+2)x+(2a\varepsilon a_2+a_1+2\varepsilon a_1)x^2+\circ(x^2)=0$$

ce qui donne par identification :

$$a_1=-\frac{1}{\varepsilon a}\,; \qquad a_2=\frac{1}{2a^2}(1-2\varepsilon)$$

D'où les développements

1. pour t au voisinage de 1

$$t=1-\frac{x}{a}+\frac{3x^2}{2a^2}+\circ(x^2)$$

2. pour t au voisinage de -1

$$t=-1+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\circ(x^2) \quad .$$

Nous retrouvons bien pour $y=tx$:

$$y=x(1-\frac{x}{a})+\circ(x^2)$$
$$y=x(-1+\frac{x}{a})+\circ(x^2)$$

Exercice :

On considère la courbe d'équation :

(C) $$y^2-x^3+x^2=0$$

1. A-t-elle des points singuliers ? Les (ou le) définir et calculer leur ordre.

2. En déduire une paramétrisation de (C).

Exercice :

a étant un nombre positif, on considère la courbe d'équation :

$$f(x,y) = 4a + 24x + 4ay - a(x^2 - y^2) + 24xy + 2x^3 + 6xy^2 = 0$$

Montrer qu'elle n'a qu'un seul point singulier et calculer ses coordonnées.

Calculer l'ordre de ce point singulier ainsi que les pentes des tangentes en ce point.

Exercice :

On considère la courbe d'équation :

$$f(x,y) = (x-1)^2y^4 + (x-1)y^3 - x^2 = 0 \tag{4}$$

Montrer que l'origine est un point multiple et que c'est le seul.

On étudie maintenant la courbe dans un voisinage de l'origine. Montrer que dans un voisinage de l'origine, il existe t, différent de 0 ou de l'infini, et qu'il existe μ, rationnel positif tel que la courbe

$$y = tx^\mu$$

soit localement équivalente à (4).

En déduire l'allure de (4) dans un voisinage de l'origine.

Exercice

On considère la cubique définie par l'équation :

$$f(x,y) \equiv xy^2 - 2x^2y - x^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

Montrer qu'elle n'admet qu'un seul point singulier et calculer les coordonnées de ce point (on accordera une attention particulière à la démonstration de l'unicité).

Calculer l'ordre de ce point singulier ainsi que les pentes des tangentes en ce point.

Déduire de tout ceci une paramétrisation de la cubique.

Exercice

On considère la cubique d'équation :

$$xy^2 - x^2y + 2xy + x - 4y = 0$$

Donner les équations définissant, s'ils existent, les points singuliers de la cubique.

Vérifier que le point de coordonnées $(2,1)$ est un point singulier et faire l'étude de la courbe au voisinage de ce point (ordre et tangentes).

En déduire une paramétrisation possible de la cubique.

3. Compléments :

Comme il a déjà été dit, l'étude précédente ne couvre pas tous les cas. Nous allons esquisser sur un exemple une méthode permettant d'en étudier certains et, pour ce faire, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition :

On dit qu'une courbe $y = \varphi(x)$ a le même comportement que la courbe $f(x, y) = 0$ dans le voisinage de $x = a$, s'il existe un nombre réel α positif tel que

$$f\left(x, \varphi(x)\right) = \mathcal{o}\left(|x - a|^{\alpha}\right)$$

Appliquons cette définition à la courbe (C) définie implicitement par l'équation

$$f(x, y) = (x-1)^2y^4 + (x-1)y^3 - x^2 = 0 \quad .$$

Le développement limité de cette équation dans un voisinage de l'origine s'écrit de manière évidente, puisqu'elle est algébrique :

$$f(x, y) = -x^2 - y^3 + xy^3 + (x-1)^2y^4 = 0 \quad .$$

Cette fonction ne ressort pas des cas précédents puisqu'ici $f''_{y^2}(0,0) = f''_{xy}(0,0) = 0$ et son développement met en évidence la quantité $-x^2 - y^3$ que nous allons démontrer prépondérante devant le reste. En effet, l'expression algébrique ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$y^3\left(1 - x - y(x-1)^2\right) = -x^2$$

qui met en évidence que, lorsque x tend vers 0, y tend lui aussi vers 0. Nous pouvons alors écrire successivement :

$$\begin{aligned} y^3 &= -\frac{x^2}{1 - x - y(1-x)^2} \\ y^3 + x^2 &= x^2\left(1 - \frac{1}{1 - x - y + 2xy - x^2y}\right) \\ &= x^2\left(\frac{-x - y + 2xy - x^2y}{1 - x - y + 2xy - x^2y}\right) \end{aligned}$$

La parenthèse de la dernière équation tend vers 0 lorsque x tend vers 0, y restant sur la courbe. Le second membre est donc un $\mathcal{o}(x^2)$, et nous pouvons écrire

$$y = -x^{2/3} + \mathcal{o}(x^{2/3})$$

Si nous posons $y = \varphi(x) = -x^{2/3}$, alors la courbe $y = \varphi(x)$ a le même comportement que la courbe (C) dans un voisinage de l'origine, ce qui permet de tracer cette dernière dans ce voisinage.

Par ailleurs, la courbe (C) admet une asymptote $x = 1$ puisqu'elle peut se mettre sous la forme

$$(x-1)^2 + \frac{(x-1)}{y} - \frac{x^2}{y^4} = 0$$

Il est alors légitime de se demander si, dans un voisinage de cette asymptote, la courbe (C) ne se comporterait pas comme la fonction

$$y = \frac{a}{(x-1)^\alpha}$$

Plus précisément, posons :

$$(x-1)^\alpha y = a(x)$$

et demandons-nous s'il existe pour $a(x)$ une limite lorsque x tend vers 1. Les quantités $a(x)$ et α doivent alors satisfaire l'équation :

$$a^4(x)(x-1)^2 + a^3(x)(x-1)^{\alpha+1} - x^2(x-1)^{4\alpha}$$

dans laquelle les puissances de $(x-1)$ ne peuvent être toutes du même ordre. Il faudrait en effet que :

$$2 = \alpha + 1 = 4\alpha$$

ce qui est impossible.

Par contre, il est possible de trouver deux valeurs de α distinctes telles que dans l'expression ci-dessus deux des termes soient du même ordre et que, de plus, ce soit l'ordre le plus bas. Pour les trouver, il suffit de prendre les équations ci-dessus deux à deux.

◇ $2 = 4\alpha$. Dans ce cas, l'équation de définition s'écrit :

$$a^4(x)(x-1)^2 + a^3(x)(x-1)^{3/2} - x^2(x-1)^2 = 0$$

Il y a bien deux termes du même degré, mais comme ce n'est pas le degré le plus bas, cette solution pour α est éliminée.

◇ $2 = \alpha + 1$. En reportant $\alpha = 1$ dans l'équation de définition, nous obtenons :

$$a^4(x)(x-1)^2 + a^3(x)(x-1)^2 - x^2(x-1)^4 = 0$$

soit

$$(a^4(x) + a(x)) + x^2(x-1)^2 = 0$$

Quand $(x-1)$ tend vers 0, cette équation devient :

$$(a^4(1) + a^3(1)) = 0$$

La solution $a = 0$ est sans intérêt. Il reste $a(1) = -1$. Une branche de la courbe C est alors, dans un voisinage de $x = 1$ de la forme (figure 7) :

$$y = -\frac{1}{x-1}$$

◇ $\alpha + 1 = 4\alpha$. En reportant $\alpha = 1/3$, l'équation de définition prend la forme :

$$a^4(x)(x-1)^2 + a^3(x)(x-1)^{4/3} - x^2(x-1)^{4/3} = 0$$

Par un raisonnement identique au précédent, comme $(x-1)^{4/3}$ est un $\mathrm{o}(x-1)$, cette équation se simplifie en :

$$(a^3 - x^2)(x-1)^{4/3} = 0$$

puisque $(x-1)^2$ est d'ordre supérieur ; d'où $a^3(1) - 1 = 0$, soit $a(1) = 1$ et la branche correspondante a pour forme (figure 7) :

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

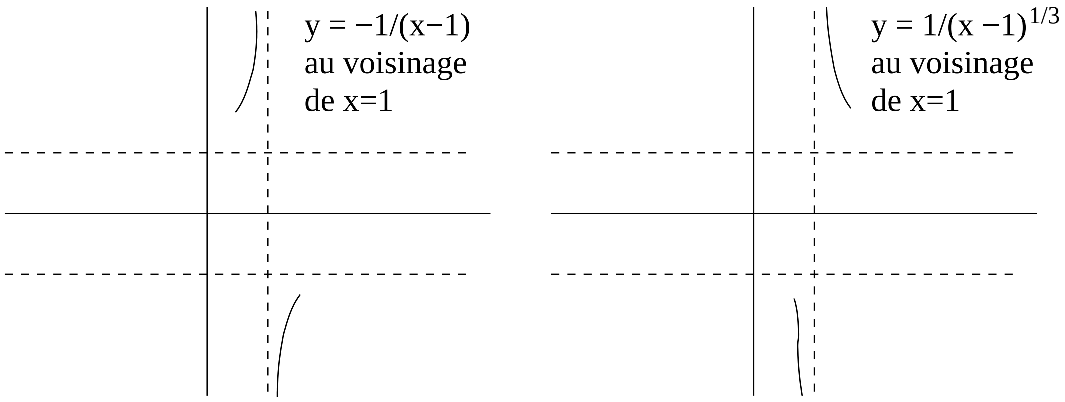


Figure 7. Comportement au voisinage de l'asymptote $x = 1$ de la courbe C définie par $f(x, y) = (x-1)^2 y^4 + (x-1)y^3 - x^2 = 0$.

Étude d'une courbe à l'infini.

Quelques définitions :

• *Dire qu'un nombre réel z tend vers plus l'infini, revient à dire que pour tout nombre A réel positif, il existe un nombre z_0 tel que, dès que z est supérieur à z_0, z est supérieur à A.*

• *On dit qu'une courbe possède une* branche infinie *lorsqu'il existe une région où au moins la valeur absolue de l'une des coordonnées du point courant M est non-majorée.*

• *Étant donné une branche infinie d'une courbe, M un point courant sur cette branche et O étant l'origine des coordonnées, la demi-droite Od définit une direction asymptotique si elle est la limite de la demi-droite OM quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche.*

Conséquence : l'angle que fait la direction asymptotique avec un axe quelconque est indépendante du point O (exercice : le démontrer).

- *Une droite D est asymptote d'une branche infinie d'une courbe lorsque la distance d'un point M de la courbe à l'asymptote tend vers 0 lorsque le point s'éloigne à l'infini sur la courbe.*

Remarques :

Les définitions ci-dessus s'appliquent aux courbes définies par des coordonnées cartésiennes, rectangulaires ou non. Elles ne sont plus aussi 'claires' si on les applique aux coordonnées polaires : la courbe $r = a/\theta$ pour θ variant de 1 à l'infini s'enroule autour de l'origine et offre un contre-exemple ; cette courbe est de plus de longueur infinie.

Dans les études ultérieures de courbes, il faudra donc garder à l'esprit que ces définitions ne recouvrent pas l'ensemble des situations que l'on peut rencontrer.

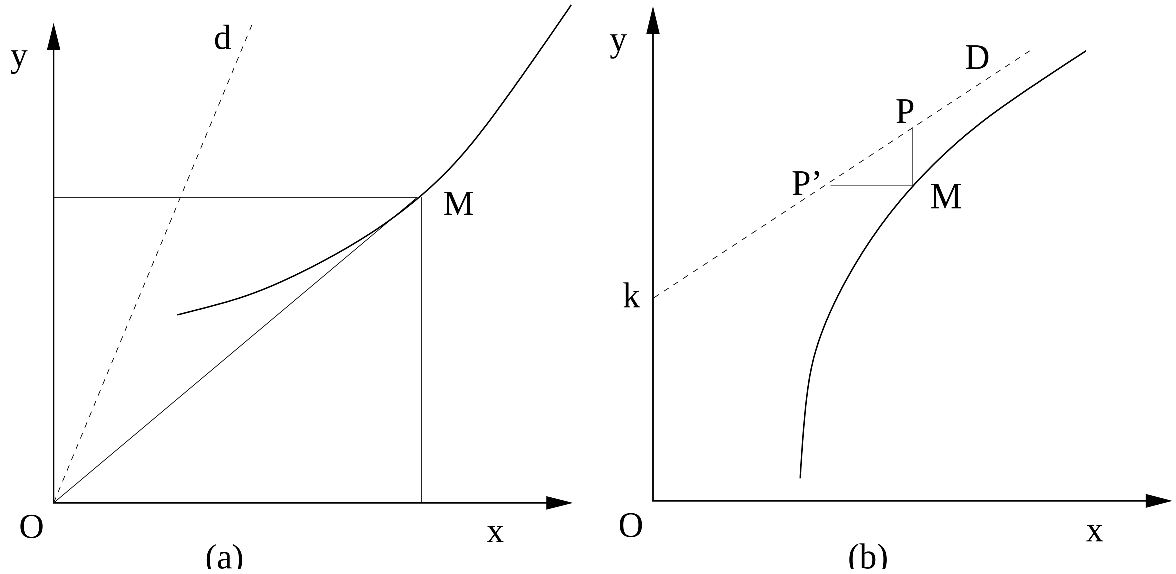


Figure 8. (a) direction asymptotique : la droite OM tend vers la limite Od ; (b) D est asymptote : la distance MP ou MP' tend vers 0 quand M tend vers l'infini.

Pour calculer explicitement une direction asymptotique, il suffit donc de calculer la pente de cette demi-droite ; autrement dit, il suffit de calculer, si elle existe, la

$$\lim \frac{y}{x} \qquad \text{pour } x \to \infty \text{ et } y \text{ appartenant à la branche}$$

Exemples :

- Soit la parabole

$$f(x, y) = x - y^2 = 0$$

Pour rechercher s'il existe une direction asymptotique, il suffit de poser $y = ux$, de reporter dans l'équation de la courbe (ce qui impose au point (x, y) d'appartenir à la courbe) et de vérifier si u admet une limite finie quand x tend vers l'infini ; ce qui donne après simplification :

$$1 = u^2 x$$

u tend donc vers 0 quand x tend vers l'infini ; $y = 0$ est donc direction asymptotique.

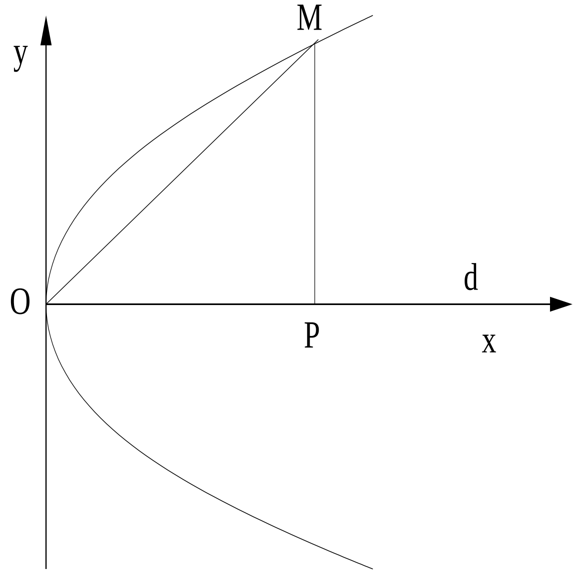


Figure 9. La parabole $f(x, y) = x - y^2 = 0$.

Cette limite n'est pas une asymptote puisque

$$MP = \sqrt{x} \to \infty \quad \text{quand} \quad x \to \infty$$

- Soit la courbe

$$f(x, y) = 2y^2 - xy + y + 1 = 0$$

De façon analogue, le remplacement de y par ux dans cette équation donne

$$u(2u - 1)x^2 + ux + 1 = 0$$

La recherche de limites possibles de u lorsque x tend vers l'infini utilise la continuité des opérations dans $\mathbb{R}$; l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$u(2u - 1) + \frac{u}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Par passage à la limite lorsque x tend vers l'infini, si u admet une limite (valeur d'adhérence) finie notée u, cette valeur vérifie nécessairement par continuité

$$u(2u - 1) = 0$$

La courbe admet donc deux directions asymptotiques possibles d'après la condition nécessaire précédente. Ce sont :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}$$

qu'il faudra vérifier par la suite. Pour cette courbe, la droite $y = 0$ est asymptote et il est assez facile de le voir d'après les définitions en considérant le point de la courbe d'abscisse x et d'ordonnée k ; sa distance à l'axe des x est évidemment k et il satisfait à l'équation

$$f(x, k) = 2k^2 + k(1 - x) + 1 = 0$$

Le comportement de k quand x tend vers l'infini s'obtient de la même manière que ci-dessus en écrivant l'équation sous les formes successives :

$$\begin{aligned} &-kx + 2k^2 + k + 1 = 0 \\ &-k + \frac{2k^2 + k + 1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Cette équation montre que, s'il existe des valeurs bornées de k, ces dernières tendent vers 0 quand x tend vers l'infini ; il en est donc de même de la distance d'un point de la courbe à l'axe des abscisses ; sous cette hypothèse, l'axe des abscisses est donc une asymptote de la courbe. (Dans ce cas précis, cette hypothèse est facile à vérifier, l'équation étant du second degré. Dans le cas général, le problème est souvent beaucoup plus compliqué : on est alors obligé de contrôler *a posteriori*).

Cette courbe possède également une autre asymptote, ce qui se voit aisément en écrivant son équation sous la forme :

$$\begin{aligned} x &= 2y + 1 + \frac{1}{y} \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers l'infini, (x, y), le point courant de cette courbe est éloigné de la droite $y = x/2 - 1/2$ de la distance $1/2y$; comme cette distance tend vers 0, la droite est asymptote.

Remarques :

- Il aurait été tout aussi possible de calculer les directions asymptotiques en résolvant les diverses équations du second degré qui apparaissent dans les exemples précédents. Le passage à la limite aurait ensuite donné le même résultat, mais, contrairement à la méthode proposée ci-dessus, il n'est pas possible d'étendre cette technique à des équations de degré supérieur à 2.

- L'exemple de la parabole montre qu'il peut y avoir direction asymptotique sans qu'il y ait asymptote ; par contre, l'existence d'une asymptote à une courbe entraîne celle d'une direction asymptotique.

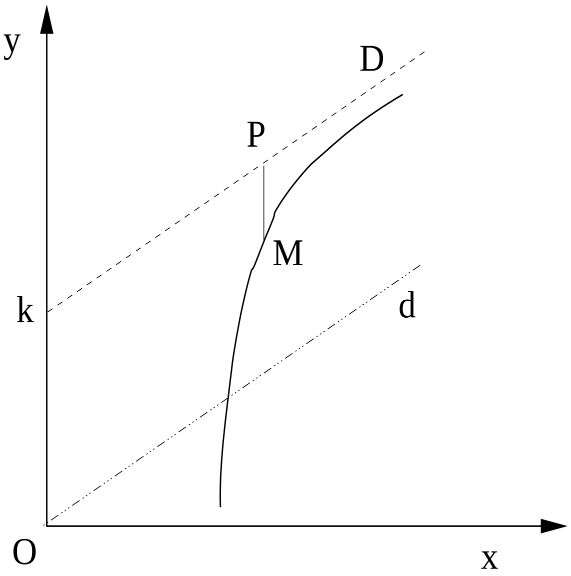


Figure 10. Toutes les fois qu'il y a asymptote, il y a direction asymptotique.

En effet, s'il existe une asymptote d'équation $y = mx+k$, il est toujours possible d'écrire, avec les conventions de la figure 9 que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

Comme D est asymptote, le vecteur $\overrightarrow{PM}$ tend vers 0 (puisque sa norme tend vers 0) quand M tend vers l'infini sur la courbe. Si (x, y) sont les coordonnées du point M de la courbe, y est également l'ordonnée du point P et on a donc

$$MP = y - mx - k \longrightarrow 0$$

quand x tend vers l'infini. La pente de la demi droite OM s'écrit

$$\frac{mx+p}{x} \quad \text{et tend bien vers } m$$

L'équation de la direction asymptotique est donc $y = mx$.

Cette remarque sera utile lors du développement du calcul explicite des asymptotes : s'il n'y a pas de direction asymptotique, il n'y a pas d'asymptote.

Calcul pratique des asymptotes.

La définition des asymptotes montre que deux cas seulement sont possibles :

- ou une seule des coordonnées (x ou y) tend vers l'infini, ce qui peut conduire au cas d'une asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées ;
- ou les deux coordonnées tendent vers l'infini, ce qui peut conduire au cas d'une asymptote oblique.

Les méthodes de calculs, dont nous allons expliciter les principes s'adaptent aux deux cas précédents dès que l'on a réussi à se ramener au cas des fonctions algébriques. Nous supposerons donc dorénavant que nous sommes dans ce cas et donc, pour simplifier les notations, que f est elle-même une fonction algébrique.

Recherche des asymptotes parallèles aux axes :

Supposons que l'on recherche des asymptotes parallèles à l'axe des y, c'est-à-dire pour y tendant vers l'infini alors que x reste fini. Après avoir mis f sous la forme d'un polynôme suivant les valeurs décroissantes de y

$$f(x, y) = y^n P_\alpha(x) + y^{n-1} P_\beta(x) + \cdots = 0$$

où les P_i sont des polynômes de degrés quelconques en x, il suffit de diviser par y^n pour se retrouver dans la situation des exemples précédents :

$$P_\alpha(x) + \frac{1}{y} P_\beta(x) + \cdots = 0$$

x restant fini par hypothèse, les solutions, si elles existent, devront satisfaire par continuité à

$$P_\alpha(x) = 0$$

et les racines réelles de cette dernière équation déterminent les équations des asymptotes. On procède évidemment de même pour les asymptotes parallèles à l'axe des x.

Recherche des asymptotes obliques.

Pour la raison invoquée ci-dessus, il faut commencer par rechercher s'il existe des directions asymptotiques. Pour cela, il est pratique de mettre le polynôme sous la forme d'une somme de polynômes homogènes

$$f(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots = 0$$

où les φ_k sont des polynômes homogènes de degré k.

La direction asymptotique se recherchant par la limite pour un point de la courbe du rapport y/x quand x tend vers l'infini, on remplace dans f, y par ux

$$\varphi_n(x, ux) + \varphi_{n-1}(x, ux) + \cdots = 0$$

L'homogénéité permet alors d'écrire

$$x^n \varphi_n(1, u) + x^{n-1} \varphi_{n-1}(1, u) + \cdots = 0$$

Si une limite finie existe pour u, la recherche de telles solutions u finies lorsque x tend vers l'infini s'obtient alors en divisant par x^n et en passant à la limite. Il n'y aura donc de solutions que si u satisfait à

$$\varphi_n(1, u) = 0$$

Les racines réelles m de cette équation donnent les pentes des directions asymptotiques dont les équations s'écrivent $y = mx$.

Si donc il y a direction asymptotique, il peut y avoir asymptote ; il faut donc vérifier s'il existe une limite de $y - mx$ lorsque x et y tendent vers l'infini tout en restant sur la courbe $f(x, y) = 0$.

Posons donc $y-mx = k$ et reportons cette expression dans l'équation de la courbe ; nous obtenons un polynôme qu'il n'y a plus qu'à ordonner suivant les puissances décroissantes de x

$$x^p Q_s(k) + x^{p-1} Q_t(k) + \cdots = 0$$

Un raisonnement analogue à ceux ci-dessus montre alors que s'il y a une solution, elle doit satisfaire à

$$Q_s(k) = 0$$

Les solutions réelles de cette équation déterminent alors les asymptotes

$$y = mx + k$$

Exemples :

Étude des asymptotes de la courbe :

$$f(x, y) = x^2 y + xy^2 - y^2 + x = 0$$

Les raisonnements ayant été longuement explicités précédemment ne seront pas détaillés.

- Asymptotes parallèles à $0x$ $(x \to \infty)$.

De f ordonné par rapport à x

$$f(x, y) = yx^2 + (y^2 + 1)x - y^2 = 0$$

et de sa division par x^2

$$y + \frac{1}{x}(y^2 + 1) - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

se déduit l'asymptote

$$y = 0$$

lorsque x tend vers l'infini.

- Asymptotes parallèles à $0y$ $(y \to \infty)$.

De f ordonné par rapport à y

$$f(x, y) = (x - 1)y^2 + x^2 y + x = 0$$

et de sa division par y^2

$$x - 1 + \frac{1}{y}x^2 + \frac{x}{y^2} = 0$$

se déduit l'asymptote

$$x = 1$$

lorsque y tend vers l'infini.

- Asymptotes obliques.

f étant sous la forme du polynôme homogène

$$xy(x + y) - y^2 + x = 0$$

la recherche des directions asymptotiques se fait en y portant $y = ux$

$$f(x, ux) = x^3 u(u + 1) - u^2 x^2 + x = 0$$

qui, mis sous la forme

$$u(u + 1) - \frac{u^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$$

fournit lorsque x tend vers l'infini les directions asymptotiques :

- $u = 0$ déjà connue par l'asymptote précédemment calculée ;
- $u = -1$.

En reportant $y = -x + k$ dans f

$$f(x, -x + k) = x(-x + k)k - (-x + k)^2 + x = 0$$

soit

$$-(k + 1) + \frac{1}{x}(k + 1)^2 + \frac{k^2}{x^2} = 0$$

qui admet $k = -1$ pour solution quand x tend vers l'infini.
La courbe admet donc pour asymptote oblique la droite

$$y = -x - 1$$

Application à la strophoïde :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)x - (x^2 - y^2)a = 0\,; \quad a > 0$$

En mettant l'équation ci-dessus sous la forme

$$(x + a) + \frac{x^2(x - a)}{y^2} = 0$$

l'asymptote

$$x = -a$$

est mise en évidence ; comme de plus, il est facile de vérifier (Exercice : le faire) que, si l'on pose $x = -a - \epsilon$, l'équation n'a pas de solution en y, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est bien déterminée.
Enfin, la mise de l'équation $f = 0$ sous la forme

$$1 - \frac{a}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{ay^2}{x^3} = 0$$

montre qu'il n'y a pas d'asymptote parallèle à Ox puisque le passage à la limite aboutit à $1 = 0$.

Exercice :

Trouver les asymptotes des courbes :

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= xy(x+y) - y^2 + x = 0\\
f_2(x,y) &= (x-1)^2y^4 + (x-1)y^3 - x^2 = 0\\
f_3(x,y) &= xy^2 - 2x^2y - x^2 + 2x - 2y - 1 = 0\\
f_4(x,y) &= xy^2 - x^2y + 2xy + x - 4y = 0
\end{aligned}$$

Remarques :

- Les exemples supposent tous explicitement que f est algébrique. Lorsque tel n'est pas le cas, il faut tenter de s'y ramener dans la mesure du possible. Par exemple, le comportement à l'infini de la courbe définie par

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - a^2 \sin\frac{xy}{a^2} = 0$$

se déduit de l'équation

$$x^2 - y^2 = 0$$

- Une courbe algébrique de degré n admet par définition au plus n points d'intersection avec une droite. Parmi ces derniers, un certain nombre peuvent se trouver à l'infini. Il est possible d'interpréter dans ce sens les techniques précédentes. Par exemple, la division par y^n de l'équation

$$f(x,y) = y^n P_\alpha(x) + y^{n-1}P_\beta(x) + \cdots = 0$$

dans la recherche des asymptotes parallèles à Oy peut s'interpréter comme la substitution dans f de y par $1/y$, c'est-à-dire par la recherche des points d'intersection à l'infini avec une parallèle à Ox. Il est tout à fait possible de récrire les techniques développées ci-dessus dans ce sens.

Suite (et fin ?) de l'étude d'une courbe.

Comme il a été dit au début de ce chapitre, s'il est possible d'obtenir quelques indications sur une courbe en étudiant ses points multiples ou son comportement asymptotique, il n'existe pas de solution miracle pour relier ces informations entre elles et obtenir le tracé de la courbe. Ce 'raccordement' dépendra essentiellement de ce que l'on aura su découvrir de la courbe. Ce fait sera simplement ici illustré par la fin de l'étude de la strophoïde. Cela dit, la brutalité des affirmations précédentes seront tempérées par l'énoncé de quelques propriétés ou méthodes qui, dans certains cas, peuvent apporter une contribution non négligeable dans l'étude des courbes.

Premier tracé de la strophoïde :

Le bilan de la récolte des propriétés locales ou asymtotiques de la strophoïde n'est pas nul ; il n'est pas non plus très important. Il peut être résumé en deux courtes phrases : la strophoïde possède

- un point double à l'origine dont les pentes des tangentes aux branches sont les bissectrices des axes ;
- une asymptote ($x = -a$) par rapport à laquelle on sait placer la courbe.

Un peu d'attention, qu'il eut été bon d'avoir avant de faire les études précédentes, montre que, l'équation de la courbe pouvant s'écrire :

$$y^2 = x^2 \, \frac{a - x}{a + x}$$

elle ne peut avoir de solution que dans le domaine

$$(a - x)(a + x) \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad -a < x \leq a$$

De plus la courbe est symétrique par rapport à Ox (la changement de y en -y laisse x inchangé) ; elle passe par le point $(a, 0)$ où la tangente est verticale (limite de $y/(a - x)$ lorsque x tend vers a par valeurs inférieures.

Ces résultats sont reportés sur la figure 11 (a). Comme la courbe est simple (c'est une cubique), il n'est pas trop difficile d'imaginer le raccordement des parties connues comme il est indiqué sur la figure 11 (b) ; ce qui fournit une allure grossière de la courbe étudiée, allure qu'il reste à contrôler.

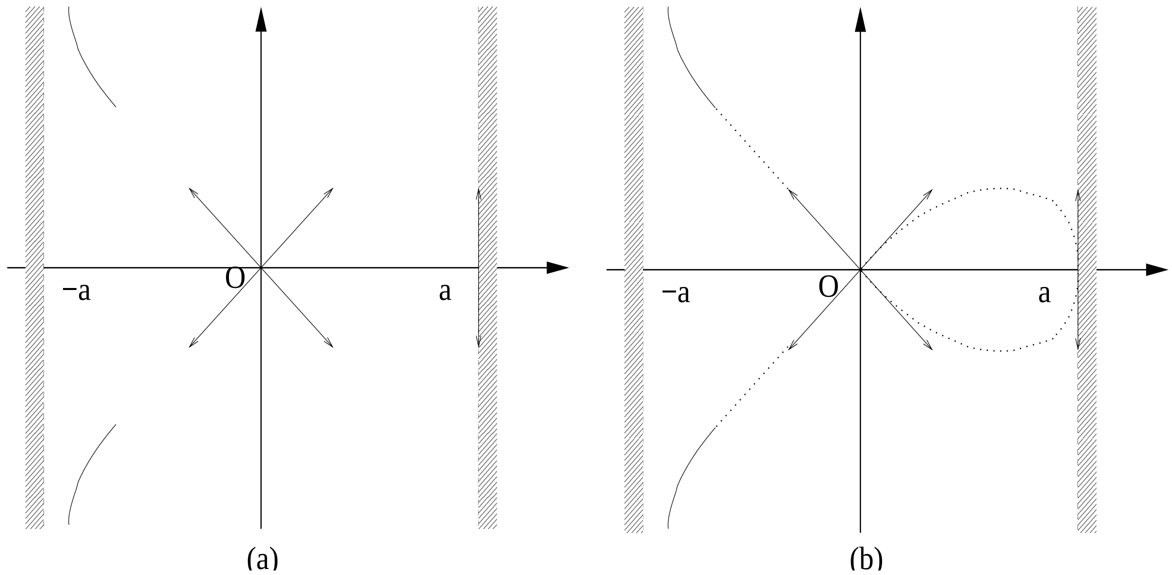


Figure 11. Tracé de la strophoïde ; (a) les faits connus ; (b) les interpolations.

Contrôle du premier tracé :

Il faut bien garder à l'esprit que le premier tracé n'est qu'une hypothèse qui doit être contrôlée. Par exemple :

- Si le tracé proposé est exact, il existe des régions où la courbe est coupée par une parallèle à Ox en un seul point, d'autres en trois points. En effet, les abscisses des points d'intersection de la droite $y = \text{Cte}$ avec la strophoïde sont données par l'équation du troisième degré :

$$x^3 - ax^2 + y^2x + ay^2 = 0$$

qui n'a qu'une ou trois racines réelles. Pour essayer de localiser ces dernières, considérons la courbe définie par :

$$\psi(x) = x^3 - ax^2 + y^2x + ay^2$$

dont la dérivée

$$\psi'(x) = 3x^2 - 2ax + y^2$$

a pour discriminant $a^2 - 3y^2$.

La dérivée ψ' ne sera de signe constant que si $a^2 - 3y^2 \leq 0$ ($y \geq a/\sqrt{3}$ et $y \leq -a/\sqrt{3}$). Dans ce cas, ψ n'aura qu'une racine ; et comme $\psi(0) = ay^2$ et $\psi(-a) = -2a^3$, cette racine est située entre $-a$ et 0. Ce résultat est donc compatible avec la position de la strophoïde par rapport à son asymptote sur le graphe présumé.

Par contre, si $a^2 - 3y^2 \geq 0$, tout ce que l'on peut dire est qu'il y a une ou trois racines possibles, c'est-à-dire un ou trois points d'intersections possibles de la strophoïde avec une droite parallèle à Ox sans que l'on puisse préciser davantage par le calcul. Ces résultats sont résumés sur la figure 12.

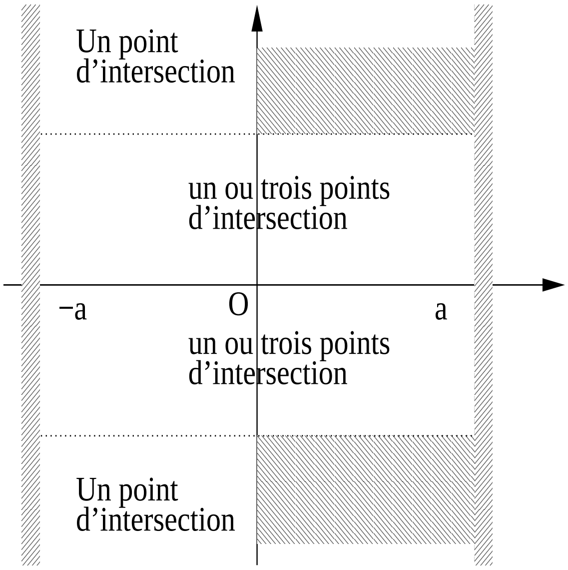


Figure 12. Nombre de points d'intersection de la strophoïde avec une droite $y = \text{Cte}$.

• Les résultats précédents peuvent être affinés en recherchant les points de la courbe à tangente horizontale qui devraient exister d'après le graphe proposé. Ce sont les solutions de

$$f(x, y) = 0\,; \quad f'_x(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f'_y(x, y \neq 0$$

Il faut donc calculer les solutions du système

$$\begin{aligned} &x^3 - ax^2 + y^2x + ay^2 = 0 \\ &3x^2 - 2ax + y^2 = 0 \end{aligned}$$

qui s'obtiennent par exemple en abaissant par combinaisons linéaires le degré de x dans les polynômes précédents ; ce qui donne successivement

$$\begin{aligned} -ax^2 + 2y^2x + 3ay^2 &= 0 \\ 3x^2 - 2ax + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(3y^2 - a^2) + 5ay^2 &= 0 \\ 3x^2 - 2ax + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(3y^2 - a^2) + 5ay^2 &= 0 \\ x(21ay^2 - 2a^3) - y^2(3y^2 - a^2) &= 0 \end{aligned}$$

La première des deux équations ci-dessus fournit

$$x = \frac{5ay^2}{a^2 - 3y^2}$$

qui reporté dans la seconde donne l'équation bicarrée

$$y^4 + 11a^2y^2 - a^4 = 0$$

dont les seules solutions réelles sont

$$y = \pm\sqrt{\frac{-11 + 5\sqrt{5}}{2}}a \approx \pm 0,42a$$

et donc

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a \approx 0,618a$$

La strophoïde admet donc des extrema relatifs aux points de cordonnées

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a \quad , \quad y = \pm\sqrt{\frac{-11 + 5\sqrt{5}}{2}}a$$

qui se trouvent bien dans la région prévue précédemment et dont on se doit de vérifier qu'ils appartiennent bien à la courbe.

En définitive la strophoïde a l'allure suivante :

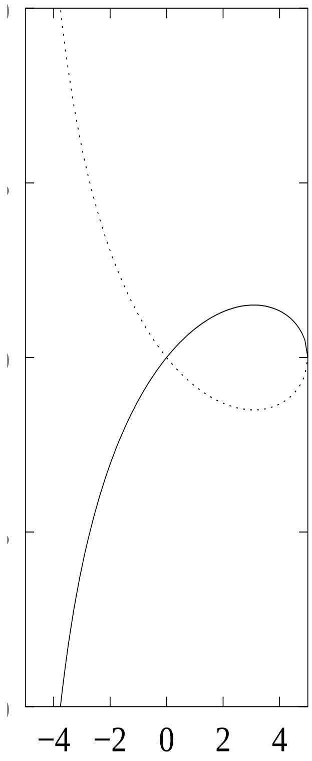


Figure 13. Tracé final de la strophoïde.

REMARQUES SUR LA STROPHOÏDE :

L'origine étant un point double, la courbe est paramétrable en étudiant ses points d'intersection avec une droite passant par l'origine, c'est-à-dire en reportant $y = tx$ dans l'équation de la courbe ; ce qui donne la paramétrisation :

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$y = at\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Le nom de la strophoïde vient du grec $\sigma\tau\rho\acute{o}\varphi o\varsigma$ (strophos) qui veut dire cordon, lacet, ceinture ; à partir du moment où l'on connaît la forme de cette courbe, il n'y a pas de commentaire à ajouter. Cette courbe s'appelle également 'focale à noeud de Quetelet' (mathématicien belge, né à Gand en 1796, mort à Bruxelles en 1874). Sa définition géométrique la plus générale est la suivante :

Soit un angle quelconque yOx et un point A sur Ox ; par ce point, on mène une droite qui rencontre Oy en B ; on définit alors sur cette droite de par et d'autre de B deux points M et M' par $BM = BM' = BO$. Lorsque la droite AB varie, M et M' décrivent une strophoïde.

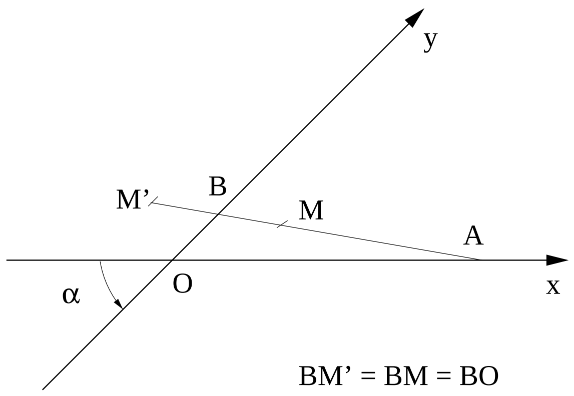


Figure 14. Construction géométrique de la strophoïde.

Si α est l'angle $x0y$, ρ et θ les coordonnées polaires usuelles définie à partir de Ox, et si l'on pose $OA=a$, l'équation de la strophoïde s'écrit :

$$\rho = a\frac{\sin(2\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}$$

La courbe étudiée précédemment correspond au cas $\alpha=\pi/2$; elle est dite strophoïde droite.

Quelques techniques d'information complémentaires.

- LE NOMBRE DE POINTS D'INTERSECTION AVEC UNE DROITE :

Sans chercher à calculer ce nombre de façon systématique (ce qui serait une autre façon de faire la théorie des courbes), il est possible de tirer parfois de précieux renseignements de la propriété suivante :

Soit une courbe algébrique définie par $f(x,y)=0$ *et deux points quelconques du plan,* P_1 *de coordonnées* (x_1,y_1) *et* P_2 *de coordonnées* (x_2,y_2).

Si le produit $f(x_1,y_1)f(x_2,y_2)$ *est positif (resp. négatif), le segment* P_1P_2 *coupe la courbe en un nombre pair (resp. impair) de points.*

La démonstration de cette propriété est presque évidente : le segment P_1P_2 est paramétrisé par

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=t$$

lorsque $t\in[0,1]$, P_1 étant atteint pour $t=0$ et P_2 pour $t=1$.

Les valeurs de t correspondant aux points d'intersection de la courbe et de P_1P_2 sont racines de l'équation

$$h(t)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))=0$$

qui est un polynôme en t puisque f est algébrique.

Le nombre de points d'intersection entre P_1 et P_2 est donc pair ou impair selon que $h(0)$ et $h(1)$ sont de même signe ou de signe contraire. Comme $h(0) = f(x_1, y_1)$ et $h(1) = f(x_2, y_2)$, la proposition est démontrée.

- La méthode des régions :

Là encore, il ne s'agit pas d'une théorie, mais d'une méthode qui sera présentée dans un cas particulier et illustrée par un exemple. Elle ne permet pas de tracer une courbe, elle indique simplement des régions du plan où l'on peut être sûr de ne pas trouver une portion de la courbe. Il est facile de concevoir qu'en s'y prenant bien, si l'on connaît suffisamment de régions où ne se trouve pas la courbe, un minimum d'intelligence permettra de trouver comment faire passer cette dernière à travers les régions qui restent.

Supposons donc, par exemple, que l'équation $f(x,y) = 0$ définissant une courbe $\mathcal{C}$ puisse se mettre sous la forme :

$$A(x,y)\,B(x,y) = C(x,y)\,D(x,y)$$

En général $A(x,y) = 0$ définit une courbe beaucoup plus simple que f et il est possible de la tracer « à vue » ; il en est de même pour les autres fonctions de la décomposition.

Dans ces conditions, il est certain que la courbe $\mathcal{C}$ passe, s"ils existent par les points d'intersection respectifs des courbes définies par

$$\begin{array}{lcl} A(x,y) = 0 & \text{et} & C(x,y) = 0 \\ A(x,y) = 0 & \text{et} & D(x,y) = 0 \\ B(x,y) = 0 & \text{et} & C(x,y) = 0 \\ B(x,y) = 0 & \text{et} & D(x,y) = 0 \end{array}$$

En effet, si x et y satisfont à l'une quelconque de ces équations, alors $f(x,y) = 0$, et, pour cette raison, ces points seront dits « points de passage obligés » de la courbe $\mathcal{C}$

Le tracé des courbes $A(x,y) = 0$, $B(x,y) = 0$, $C(x,y) = 0$, $D(x,y) = 0$ découpe le plan en un certain nombre de régions qui en forment une partition. Il suffit alors de remarquer que la courbe $\mathcal{C}$ ne peut passer dans les régions où AB et CD sont de signe contraire[3].

Une telle remarque permet parfois, lorsqu'elle est judicieusement appliquée d'induire un tracé, certes grossier, d'un courbe, mais souvent beaucoup plus précis qu'on ne l'aurait imaginé.

Illustrons cette méthode par l'étude de la courbe

$$x + y + x^3 - y^5 = 0$$

Il est immédiat de constater que la courbe correspondante est symétrique par rapport à l'origine et qu'elle passe par ce point. Elle n'a pas d'asymptote puisque les coefficients

[3] Dans ce cas, on peut constater que, si $ABCD < 0$ alors AB et CD sont de signe contraire ; il sera alors plus rapide de travailler directement avec le produit $ABCD$.

des termes de plus haut degré en x et y sont constants ; pour la même raison il n'y a pas d'asymptote oblique.

Cette courbe n'admet pas non plus de point multiple, car s'il y en avait un il satisferait au système

$$\begin{aligned} &x + y + x^3 - y^5 = 0 \\ &1 + 3x^2 = 0 \\ &1 - 5y^4 = 0 \end{aligned}$$

dont la seconde équation n'a pas de solution réelle.

Il est cependant possible de recomposer l'équation de la courbe sous la forme

$$x(1 + x^2) = y(y + 1)(y - 1)(y^2 + 1)$$

Les droites $x = 0$, $y = 0$, $y = \pm 1$ déterminent des régions et trois points de passage obligés (l'origine et les points $x = 0$, $y = \pm 1$) ; les régions où l'on est certain de ne pas trouver la courbe sont hachurées sur la figure. L'association des ces deux résultats suggère la forme de la courbe (en gras) dans le voisinage des points de passage obligés. Il n'est alors pas très difficile d'extrapoler ces résultats (en pointillé) pour obtenir l'allure présumée de la courbe.

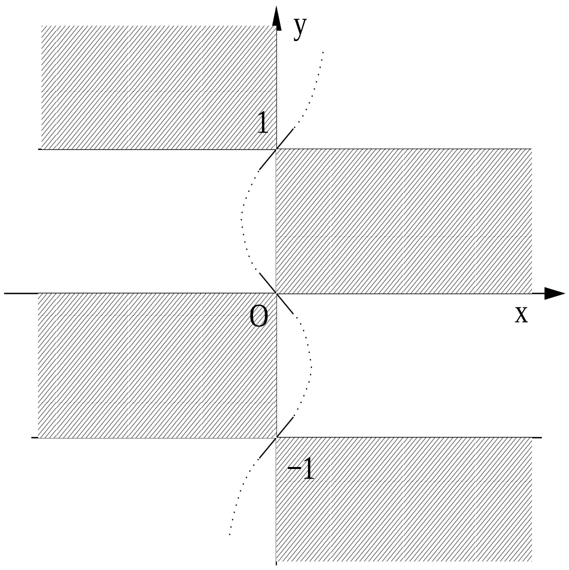


Figure 15. Premier tracé de la courbe $x + y + x^3 - y^5 = 0$.

Il doit être clair que ce tracé n'est qu'une approximation qui doit être confirmée par toute une série de « petits » calculs. Par exemple, la pente à l'origine valant -1 $(-f'_x(0,0)/f'_y(0,0))$, si la courbe a l'allure ci-dessus, elle ne peut avoir de pente horizontale, ce qui est confirmé le fait que $f'_x(x, y) = 1 + 3x^2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Par contre, la courbe doit admettre par symétrie deux tangentes verticales . Elles sont déterminées par les solutions de

$$f'_y(x,y) = 1 - 5y^4 = 0 \quad \text{soit} \quad y = \pm\left(\frac{1}{5}\right)^{1/4} \approx \pm 0,67$$

Les valeurs de x correspondantes se déduisent de

$$g(x) = f\left(x, \left(\frac{1}{5}\right)^{1/4}\right) = x^3 + x + 4 * 5^{-5/4} = 0$$

en ne prenant que le signe + à cause de la symétrie ; il est alors facile de montrer que l'équation du troisième degré ci-dessus n'a qu'une racine qui est comprise entre 0 et -1 puisque $h(0) > 0$ et $h(-1) < 0$. Il est de plus possible de calculer de façon plus précise cette racine par d'autres méthodes.

Étude détaillée d'une courbe

Soit la courbe définie par l'équation

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(y+2) - y(2x + 2y - 1) = 0$$

Cette cubique ne fait pas apparaître *a priori* de symétrie particulière.

Étude des points à l'infini :

L'équation de la courbe peut être écrite des trois manières suivantes :

$$\begin{aligned}
&x^2(y+2) - 2xy + y^3 - 2 = 0\\
&y^3 + y(x^2 - 2x) + 2(x^2 - 1) = 0\\
&y(x^2 + y^2) + 2x^2 - 2xy - 2 = 0
\end{aligned}$$

La première équation montre que la droite $y = -2$ est asymptote à la courbe, la seconde qu'il n'y a pas d'asymptote parallèle à Oy et la dernière que la seule direction asymptotique est $y = 0$ qui correspond à l'asymptote $y = -2$; il n'y a donc pas d'asymptote oblique.

Application de la méthode des régions :

Cette méthode s'applique à l'équation écrite sous la forme :

$$(x^2 + y^2 - 1)(y+2) = y(2x + 2y - 1)$$

Les limites des régions sont définies par les courbes d'équations :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0\,; \quad y + 2 = 0\,; \quad y = 0\,; \quad 2x + 2y - 1 = 0$$

et les régions dans lesquelles les deux membres de l'équation ci-dessus n'ont pas le même signe, c'est-à-dire celles où l'on est assuré de ne trouver aucun point de la courbe sont hachurées ; les points de passage obligés sont épaissis.

Compte tenu des asymptotes, il est alors assez facile en utilisant les points de passage obligés de proposer un tracé comme celui de la figure 16.

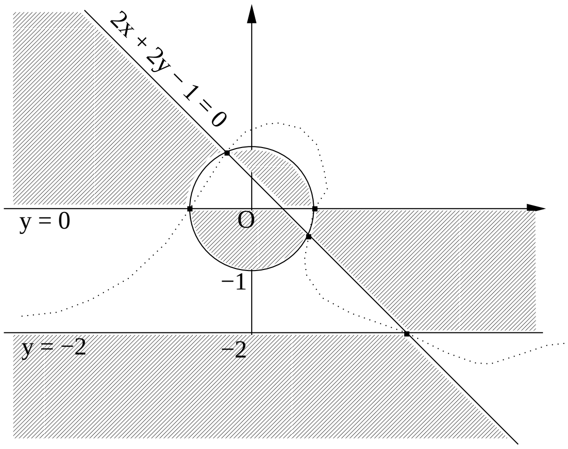


Figure 16. Ébauche du tracé de la courbe $(x^2 + y^2 - 1)(y + 2) = y(2x + 2y - 1)$.

Comme toujours dans ce cas, la vérification des hypothèses du tracé nécessite une série de calculs qui vont être développés dans la suite de ce paragraphe.

Points multiples :

S'il y avait des points multiples, ils seraient solution du système

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y(x^2 + y^2) + 2x^2 - 2xy - 2 = 0 \\ f'_x(x, y) &= 2x(y + 2) - 2y = 0 \\ f'_y(x, y) &= 3y^2 + x^2 - 2x = 0 \end{aligned}$$

Si le tracé initial est correct, il ne devrait pas y en avoir. Pour le vérifier, il faut rechercher d'abord les solutions des deux dernières équations qui peuvent se mettre sous la forme :

$$y = -\frac{2x}{x - 1} \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{\frac{1}{3}} + \frac{(x - 1)^2}{1} = 1$$

Ces courbes, une hyperbole équilatère et une ellipse, se coupent en deux points (figure 17) : l'origine et un point A.

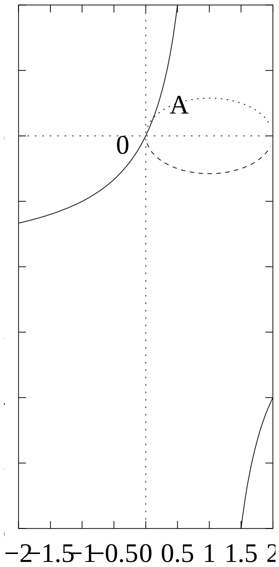


Figure 17. Étude des points multiples.

L'origine n'étant pas un point de la courbe ($f(0,0) = -2$) n'est pas un point multiple. Reste le point A dont l'équation déterminant l'abscisse s'obtient par élimination de y dans les équations de l'ellipse et de l'hyperbole ; ce qui donne :

$$x^3 - 4x^2 + 17x - 2 = 0$$

qui écrite sous la forme

$$x = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2}{17}$$

fournit par itérations successives en partant de $x = 1$ la valeur $0,120987$ qui, reportée dans l'équation de l'hyperbole, donne $y = 0,27540$; les coordonnées du point A sont donc proches de $(0,120987; 0,27540)$.

Comme $f(0.120987, 0.27540) = -1,87910$, le point A n'est pas sur la courbe qui n'admet donc pas de point multiple.

Recherche des extrema horizontaux :

Théoriquement, ces extrema sont solution du système

$$f(x,y) = 0\,; \quad f'_x(x,y) = 0$$

mais il est également possible de les rechercher comme cas particuliers d'intersection de la courbe $f = 0$ avec une droite $y = \text{Cte}$.

Pour y fixé, f est une équation du second degré en x qui n'aura de solutions réelles que si

$$\begin{aligned}\Delta &= y^2 - (y+2)(y^3-2)\\ &= -y^4 - 2y^3 + y^2 + 2y + 4 > 0\end{aligned}$$

L'étude du signe de ce polynôme du quatrième degré se simplifie notablement en remarquant qu'il est possible de le mettre sous la forme :

$$\Delta = -y^3(y+2) + y(y+2) + 4 = y(y+2)(-y^2+1) + 4$$

ce qui fait apparaître les valeurs particulières $y = 1,\ 0,\ -1,\ -2$ pour lesquelles Δ prend toujours la même valeur 4, ce qui suggère que $y = -1/2$ pourrait être un axe de symétrie. Pour vérifier cette hypothèse, il suffit de porter $y = u - 1/2$ dans Δ, ce qui donne :

$$\Delta = -u^4 + \frac{5}{2}u^2 + \frac{55}{16}$$

trinôme du second degré en u^2 dont les racines sont

$$u^2 = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{80}$$

et dont on déduit celle de Δ en fonction de y :

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{80}} = \begin{cases} 1,36\ldots \\ -2,38\ldots \end{cases}$$

Δ n'est donc positif ou nul que si (figure 17)

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{80}} \leq y \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{80}}$$

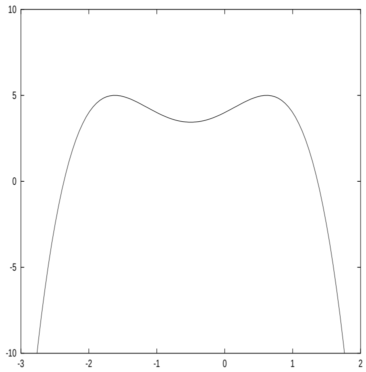


Figure 18. Les variations de Δ en fonction de y.

Dans ce domaine, la courbe rencontrera toujours deux fois une parallèle à l'axe Oy ; aux bornes il y aura racine double, ce qui donne les ordonnées des extrema cherchés. Les abscisses correspondantes s'obtiennent en reportant les ordonnées trouvées dans l'équation de la courbe, ou plus simplement dans $f'_x = 0$

$$x = 1 - \frac{2}{y+2} = 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{80}} + 2}$$

Les points à tangente horizontale ont donc pour coordonnées

$$\begin{cases} x = 0.40\ldots \\ y = 1,36\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6.45\ldots \\ y = -3,36\ldots \end{cases}$$

En conclusion :

Il existe encore des points remarquables de cette courbe, par exemple le point de coordonnées $(1,1)$ ou les points d'intersection avec l'axe de Oy

$$f(0,y) = y^3 - 2 \quad \text{soit} \quad y = 2^{1/3} \approx 1,26\ldots$$

Il est également possible de rechercher les points dont la tangente est verticale. Cela dit, l'ensemble des résultats forme un tout cohérent qui permet si, on le désire, tracer plus précisément la courbe.

Enfin, s'il paraît évident de remarquer que la méthode des régions a apporté une impulsion prépondérante dans l'étude ci-dessus, il faut faire également remarquer que le passage de

$$f(x,y) = y(x^2+y^2) + 2x^2 - 2xy - 2 = 0$$

à

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)(y+2) - y(2x+2y-1) = 0$$

n'est, lui, nullement évident.

En résumé,

Comme tout ce qui précède le montre, il n'y a pas de méthode générale d'étude des courbes ; il est tout au plus possible de tenter d'ordonner un certain nombre de possibilités qui peuvent presque être qualifiées de conseils et qui sont résumées ci-après :

- Regarder l'équation de la courbe :
  - régions d'existence,
  - périodes,
  - symétrie,...
- Rechercher ses points multiples.
- Étudier son comportement à l'infini :
  - directions asymptotique,
  - asymptotes et, si elles existent, position par rapport à ces dernières,...
- Calculer, si possible, les positions des extrema relatifs.
- Trouver les points d'intersection avec des droites particulières.
- Transformer l'équation pour lui appliquer la méthode des régions.
- Rechercher des points remarquables (intersection avec les axes,...) et en particulier les points d'inflexion qui n'ont pas été traités dans ce chapitre, car en dehors du cas sympathique $y = \varphi(x)$, ils sont solutions de l'équation

$$f_{xx}\,(f_x)^2 + 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}\,(f_y)^2 = 0$$

qui n'est pas des plus faciles à résoudre. Mais si on les connaît, ils sont très précieux pour le tracé.
- Etc.

en notant que, parmi tous ces conseils, le premier et le dernier sont certainement les plus importants : ils correspondent à tout ce qui ne pouvait être dit dans ce chapitre.

Compléments

Les exercices qui suivent font tous partie d'épreuves données en fin d'enseignement. La durée totale d'un examen n'ayant jamais excédé deux heures, ces exercices ne pouvaient prétendre à un niveau de difficulté élevé. La suite de questions ne correspond alors qu'à une proposition d'étude ; elle ne se veut ni exhaustive, ni représenter l'unique possibilité d'étudier la courbe en question.

Exercice 1.
a étant un nombre réel positif, on étudie la courbe C d'équation

$$f(x,y) = x(x^2 - 3y^2) - 3a(x^2 + y^2) = 0$$

1. Cette courbe a-t-elle des symétries apparentes ?

2. Étudier le nombre de ses points d'intersection avec une droite $x =$ Cte.

3. La courbe C possède-t-elle un ou plusieurs points singuliers ? Si oui, le ou les calculer ; si non, démontrer le contraire.

4. Trouver, si elles existent, les équations des asymptotes parallèles aux axes.

5. Trouver, si elles existent, les équations des asymptotes non parallèles aux axes.

6. La courbe C coupe-t-elle ses asymptotes ?

7. Donner les coordonnées des points dont la tangente est horizontale.

8. Donner les coordonnées des points dont la tangente est verticale.

9. Tracer le graphe de la courbe C.

10. Ce graphe suggère-t-il une autre symétrie ? Si oui, la mettre en évidence par un changement de variable approprié.

Exercice 2. (cubique de Chasles)
a étant un nombre positif, on considère la courbe définie par l'équation :

$$3a^2y = (y - x)(y - 4x)(3y + 2x)$$

1. Quelles sont ses symétries apparentes ?

2. Quelles sont ses asymptotes ?

3. D'après l'équation ci-dessus, quelles sont les régions du plan dans lesquelles on est certain de ne pas trouver un point de la courbe ? (faire un graphique).

4. Montrer que l'origine est un point régulier de cette courbe.

5. En effectuant un développement limité, donner le comportement de la courbe dans un voisinage de l'origine.

6. Déduire des questions précédentes le tracé de la courbe.

Exercice 3. La "courbe du diable" (Cramer, 1750).

On considère la courbe (C) d'équation :

$$y^4 - 3y^2 - x^4 + 5x^2 = 0$$

1. Étudier suivant les valeurs du paramètre x le nombre d'intersection de la courbe (C) avec une droite $x = \text{cte}$. En déduire qu'il existe deux « bandes verticales » du plan dans lesquelles il n'y a aucun point de la courbe (C).

2. Quelles sont les symétries de (C) ?

3. Donner, en les justifiant puis en les traçant sur un graphique, les résultats de la méthode des régions lorsque l'on met l'équation de la courbe (C) sous la forme :

$$y^2(y - \sqrt{3})(y + \sqrt{3}) = x^2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

4. Établir les équations des asymptotes de (C).

5. Étudier le ou les points singuliers de (C) et leurs tangentes.

6. Calculer les coordonnées des points
- dont la tangente est verticale ;
- dont la tangente est horizontale.

7. Tracer en le commentant le graphe de (C).

Exercice 4.

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe (C) définie par l'équation :

$$f(x, y) = -xy^3 + y^3 + 2x - 1 = 0$$

1. Montrer que la courbe (C) admet des asymptotes parallèles aux axes et donner leurs équations.

2. Préciser la position de (C) par rapport aux asymptotes.

3. Montrer que la courbe (C) n'admet aucun point singulier.

4. Montrer que l'équation définissant (C) établit une correspondance biunivoque entre $\mathbb{R} - \{1\}$ et $\mathbb{R} - \{2^{1/3}\}$.

5. En déduire le tracé de la courbe (C).

6. La courbe (C) admet-elle des symétries ? Si oui, lesquelles ?

Exercice 5.
Étude de la courbe C définie par l'équation :

$$f(x,y) = x^3 - 2ax^2 - y^2 + a^2x = 0 \quad , \quad a > 0$$

1. Montrer que cette courbe qui passe par l'origine n'est définie que pour $x \geq 0$.

2. La courbe C admet-elle des symétries particulières ?

3. La courbe C admet-elle des asymptotes ou des directions asymptotiques ?

4. Montrer que la courbe C admet un point singulier et un seul, et calculer les coordonnées de ce dernier.

5. Calculer le développement de Taylor de la courbe au voisinage du point singulier. En déduire l'ordre de ce dernier ainsi que les pentes des tangentes en ce point.

6. Calculer la pente de la tangente à l'origine.

7. Calculer les coordonnées des points dont la tangente est horizontale.

8. Étudier le nombre de points d'intersection de la courbe C avec une droite parallèle avec l'axe des x ($y = \text{cte}$).

9. Déduire des questions précédentes le tracé de la courbe.

Exercice 6.
Dans l'étude de la courbe suivante, chaque fois que cela sera possible, le résultat de chaque question devra être illustré sur un graphique indépendant des autres. Ce ne sera que lors de la dernière question qu'il sera demandé de regrouper sur un seul graphique l'ensemble des graphiques précédents.

On considère la courbe (C) définie par l'équation

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 3(y-x)(y^2+x^2) + (2y-x)x^3 = 0$$

1. Y-a-t-il des symétries apparentes ?

2. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

3. La courbe (C) possède-t-elle des asymptotes parallèles aux axes ?

4. Déterminer ses directions asymptotiques.

5. Trouver l'équation de son asymptote. (On admettra qu'il n'y a pas d'asymptote verticale).

6. Déterminer la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote.

7. Montrer que l'origine est un point multiple. (On admettra que c'est le seul).

8. Déterminer son ordre, ainsi que ses tangentes.

9. Applications de la méthode des régions.

Afin d'obtenir des informations supplémentaires sur la courbe (C), on met son équation sous la forme :

$$3(y-x)\Big((x-\frac{1}{6})^2 + (y+\frac{1}{6})^2 - \frac{1}{18}\Big) = -(2y-x)x^3$$

9.a. Dans un premier temps, montrer que le second membre de l'équation ci-desus est négligeable devant le premier dans un voisinage de l'origine ; en déduire le comportement de la courbe dans le même voisinage.

9.b. On revient à l'équation exacte de la courbe et à la méthode des régions proprement dite. Porter sur un même graphique les courbes définies ci-dessus en déterminant les coordonnées de leurs points d'intersection.

9.c. Hachurer après l'avoir justifié les régions où l'on est certain de ne pas trouver un point de la courbe (C).

10. Essayer d'induire des questions précédentes l'allure de la courbe (C).

Exercice 7.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ étant choisie, la courbe C d'équation

$$f(x,y) = x(x+y) + 2x^3 + x^4 + y^4 = 0$$

passe par les points

$$O = (0,0) \qquad A = (-1,0) \qquad B = (-1,1)$$

1. Montrer, en faisant apparaître des carrés, qu'il n'y a aucun point de la courbe dans les régions $(x>0, y>0)$ et $(x<0, y<0)$.

2. En passant en coordonnées polaires

$$x = \rho\cos\theta\,; \quad y = \rho\sin\theta$$

montrer que la courbe C n'a pas de point à l'infini.

3. Montrer que l'origine est un point singulier multiple. En utilisant la question précédente, calculer et justifier le développement de f dans un voisinage de l'origine. En déduire l'ordre de la singularité, ainsi que les tangentes en O à la courbe.

4. Calculer les pentes des tangentes aux points (-1,0) et (-1,1).

5. Étude de l'une des branches passant par l'origine de la courbe. On cherche à paramétrer x en fonction de t en posant $y = tx$.

5.a. Montrer que, dans ces nouvelles variables, la singularité s'élimine et trouver une équation définissant implicitement t en fonction de x.

5.b. Expliquer pourquoi t peut s'exprimer par un développement en série entière de x.

5.c. Application : on pose :

$$t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

En reportant dans les équations de la question **5.a.**, calculer les coefficients de ce développement limité.

5.d. En déduire le comportement de la branche correspondante de C dans un voisinage de l'origine.

6. L'autre tangente en O étant verticale, il est plus pratique de paramétrer en essayant d'exprimer x en fonction de y.

6.a. Pour cela, montrer que pour x et y restant sur la courbe, il existe α réel non nul et n entier positif tel que :

$$\lim_{y \to 0} \frac{x}{y^n} = \alpha$$

6.b. Expliquer pourquoi il est alors possible de chercher un développement de la forme :

$$x = y^n(\alpha + \beta y + \gamma y^2) + o(y^5)$$

où n et α sont les valeurs trouvées dans la question précédente. Calculer β et γ.

6.c. En déduire le comportement de cette branche de la courbe dans un voisinage de l'origine.

7. Déduire des questions précédentes le tracé de la courbe C.

Exercice 8.

On désire tracer la courbe C d'équation :

$$f(x, y) = \Big[(3x+1)^2 + y^2\Big]^2 + 4\Big[y^2 - (3x+1)^2\Big](3x+1) = 0$$

1. Quelles sont ses symétries apparentes ?

2. Il est évident que le changement de variables

$$3x + 1 = u \qquad y = v$$

simplifie l'écriture de l'équation de la courbe. On posera donc :

$$g(u, v) = (u^2 + v^2)^2 + 4u(v^2 - u^2) = 0$$

et on pourra utiliser toutes les fois que possible cette forme en gardant bien à l'esprit que **ne sont intéressants que les résultats donnés en fonction de x et de y.**

2.a. Trouver un point multiple de C.

2.b. En posant $x = -1/3 + 1/3\rho\cos\theta$ et $y = 1/3\rho\sin\theta$, trouver les termes utiles du développement limité de f au voisinage de $(-1/3, 0)$.

2.c. En déduire l'ordre du point multiple, les tangentes aux différentes branches qui y passent et expliquer pourquoi ce point multiple est unique.

3. Déduire de la forme de l'équation

$$(u^2 + v^2)^2 = -4u(v^2 - u^2)$$

des régions dans lesquelles on est certain de ne pas trouver la courbe.

4. Démontrer que la courbe C n'a ni asymptotes parallèles aux axes, ni directions asymptotiques.

5. En recherchant les solutions communes de

$$f=0 \quad , \quad f'_y=0 \quad , \quad f'_x \neq 0$$

rechercher les points de C dont la tangente est verticale.

6. Même question pour les points de C dont la tangente est horizontale.

7. Tracer l'allure de la courbe C.

8. Cette question ne pourra être abordée que si l'ensemble des questions précédentes a été traité.

Trouver une paramétrisation de la courbe C et donner la signification géométrique du paramètre.

Exercice 9.

c désignant un nombre réel non nul, on considère la courbe définie par l'équation :

$$f(x,y)=cx^2+x^3-y^2=0$$

1. Étudier le domaine de définition de cette fonction, puis déterminer les symétries de C et, si elles existent, ses asymptotes.

2. Trouver les points singuliers de C.

3. On suppose c positif, et on pose : $c=a^2$; déterminer l'ordre du point singulier ainsi que les tangentes correspondantes.

4. Calculer les coordonnées des points dont la tangente est horizontale ou verticale. En déduire le tracé dans le cas $c>0$ de la courbe.

5. On se place maintenant dans le cas où $c<0$; on pose $c=-b^2$. Montrer que l'origine est maintenant un point isolé.

6. Montrer que dans le domaine $X \geq b^2$ et $y>0$ la courbe est monotone ; en déduire son trace pour $c<0$.

Exercice 10.

On considère la courbe plane C définie par l'équation

$$f(x,y)=x^3-3xy^2+18y=0$$

1. Faire l'étude des points multiples de C (existence et calcul explicite ou démonstration de non existence).

2. La courbe C admet-elle des points à tangente horizontale ? verticale ?

3. Calculer, si elles existent, les asymptotes de C parallèles aux axes.

4. La courbe C admet-elle des directions asymptotiques ? Peut-on en déduire des asymptotes non parallèles aux axes ?

5. Préciser la position de la courbe par rapport aux asymptotes calculées dans les deux questions précédentes.

6. Montrer qu'une droite quelconque parallèle à l'axe des ordonnées coupe toujours la courbe C en deux points.

7. En utilisant le résultat de la question précédente, un calcul élémentaire montre que la courbe C se décompose en deux courbes

$$y = \frac{9 - \sqrt{81 + 3x^4}}{3x} \quad \text{et} \quad y = \frac{9 + \sqrt{81 + 3x^4}}{3x}$$

que l'on désignera par la suite respectivement par C_1 et C_2.

7.a. Étudier le comportement à l'origine, puis à l'infini, de chacune de ces deux courbes.

7.b. Tracer le graphe de la courbe C_1 après en avoir étudié la dérivée. 1

7.c. Déduire de toutes les questions précédentes le tracé du graphe de la courbe C_2.

Exercice 11.

Étude de la courbe plane C définie par l'équation

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - y^2 + x = 0$$

1. Établir les équations des asymptotes parallèles aux axes. On précisera et on reportera sur un graphique la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

2. Montrer que la courbe C possède une direction asymptotique ; trouver l'équation de l'asymptote qui lui correspond ; justifier également la position de C par rapport à cette asymptote et porter les renseignements obtenus sur le graphe précédent.

3. On rappelle que les coordonnées des points singuliers, s'ils existent, sont les solutions du système :

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - y^2 + x = 0 \tag{1}$$
$$f'_x(x, y) = 2xy + y^2 + 1 = 0 \tag{2}$$
$$f'_y(x, y) = x^2 + 2xy - 2y = 0 \tag{3}$$

3.a. En éliminant y entre les équation (3) et (2), montrer que les abscisses éventuelles des points singuliers doivent satisfaire à une équation du quatrième degré en x.

3.b. De manière analogue, montrer qu'en éliminant y entre les équation (3) et (1), les abscisses éventuelles des points singuliers doivent satisfaire à une équation du quatrième degré en x.

3.c. Si un point singulier existait, ses coordonnées devraient être solution commune des équations établies en **3.a** et **3.b.** Montrer en utilisant la méthode d'élimination que ce n'est pas le cas.

4. Après avoir écrit f sous la forme

$$x(xy + 1) = y^2(1 - x)$$

délimiter et tracer sur un graphique les régions où l'on est certain de ne pas trouver un point de C.

5. Pour éviter quelques calculs simples, mais fastidieux, on admettra que la courbe C possède deux points à tangente horizontale : l'un a pour coordonnées $(1,-1)$; l'abscisse de l'autre est comprise entre 1,6 et 2,2 et son ordonnée est comprise entre -3 et -4.

On admettra de même que la courbe C possède deux points à tangente verticale : l'origine et un point dont l'abscisse est comprise entre -2 et -3 et l'ordonnée entre 0,6 et 1,2.

En tenant compte des résultats précédents, justifier le tracé de la courbe C sur un nouveau graphique. Le résultat obtenu devra être cohérent avec les résultats des questions précédentes.

6. L'allure de la courbe C vous suggère-t-elle l'existence d'un axe de symétrie ? Si oui, quelle devrait être son équation ? Indiquer en trois lignes par quelle méthode vous vous proseriez de le démontrer.

Exercice 12. (sextique unicursale)

a est un nombre réel positif donné. Soit la courbe plane C définie par l'équation :

$$f(x,y)=a^2(4y^2-xy-a^2)-(4y^2-a^2)^2(a^2-y^2)=0$$

1. A-t-elle des symétries apparentes ?

2. Montrer que les ordonnées d'un point quelconque de cette courbe sont bornées. Pour quelles valeurs de x les bornes sont-elles atteintes ?

3. En développant $f(x,y)=0$, montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$f(x,y)=y\varphi(x,y)=0$$

En déduire une première décomposition de la courbe C.

4. En utilisant l'identité remarquable $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$, montrer que la courbe C peut également se décomposer en deux courbes d'équations

$$axy=(4y^2-a^2)(a+\sqrt{a^2-y^2})$$
$$axy=(4y^2-a^2)(a-\sqrt{a^2-y^2})$$

5. Étudier les asymptotes de la courbe C.

6. Étudier l'existence des points multiples de la courbe C et, lorsqu'ils existent, les tangentes en ces points (il sera peut-être plus pratique de commencer par faire l'étude des points multiples de la courbe $\varphi(x,y)=0$ en écrivant le développement de Taylor au voisinage de ces points, puis de compléter en tenant compte de f).

7. En utilisant la décomposition de la question **4.** appliquer la méthode des régions pour chacune des courbes obtenues.

8. Montrer que x est borné dans le domaine $a/2\leq y\leq a$.

9. Déduire des questions précédentes le tracé de la sextique.

Exercice 13.

On veut faire une étude complète de la courbe

$$f(x,y) = y^2 - 5x^2 + 2x^5 = 0$$

1. Quel est son domaine de définition et quelles sont ses symétries ?

2. Cette courbe a-t-elle des asymptotes ?

3. Cette courbe possède-t-elle des points singuliers ? Si oui, quel est leur ordre et quelles sont les pentes des tangentes en ces points ?

4. A partir des questions précédentes, montrer que la connaissance de la courbe $f(x,y) = 0$ peut se déduire d'une courbe $y = \varphi(x)$ que l'on déterminera.

5. Calculer la dérivée de φ, puis ses variations. En déduire le tracé de f.

Exercice 14.

a étant un nombre réel positif, on étudie la courbe C d'équation

$$f(x,y) = x(x^2 - 3y^2) - 3a(x^2 + y^2) = 0$$

1. Cette courbe a-t-elle des symétries apparentes ?

2. Étudier son nombre de ses points d'intersection avec une droite $x =$ Cte.

3. La courbe C possède-t-elle un ou plusieurs points singuliers ? Si oui, le ou les calculer ; si non, démontrer le contraire.

4. Trouver, si elles existent, les équations des asymptotes parallèles aux axes.

5. Trouver, si elles existent, les équations des asymptotes non parallèles aux axes.

6. La courbe C coupe-t-elle ses asymptotes ?

7. Donner les coordonnées des points dont la tangente est horizontale.

8. Donner les coordonnées des points dont la tangente est verticale.

9. Tracer le graphe de la courbe C.

10. Ce graphe suggère-t-il une autre symétrie ? Si oui, la mettre en évidence par un changement de variable approprié.

Exercice 15.

Soit la courbe C définie dans $\mathbb{R}^2$ par l'équation :

$$f(x,y) = (x^2 - 1)^2 - y^2(3 - 2y) = 0$$

1. Étudier ses symétries.

2. Trouver son ou ses point(s) multiples.

3. Donner les pentes des tangentes au(x) point(s) multiple(s) et trouver l'ordre de ce(s) dernier(s).

4. Calculer les coordonnées des points dont la tangente est horizontale.

5. Calculer les coordonnées des points dont la tangente est verticale.

6. Reporter les résultats précédents sur un même graphique.

7. Admettant que C possède deux branches infinies, tracer sur un autre graphique l'allure de cette courbe.

Exercice 16.

On étudie la courbe C définie implicitement par l'équation :

$$f(x, y) = x^4 - x^2y + y^3 = 0$$

1. Déterminer les points de la courbe C à tangente horizontale et verticale, puis le ou les points singuliers dont on fera une étude complète (ordre et différentes tangentes).

2. On écrit maintenant la courbe C sous la forme

$$(y - x^2)(x + y)(x - y) = x^2y^2$$

En déduire des régions où l'on est sûr de la courbe ne se trouve pas et les reporter sur un graphique.

3. Tracer, en le justifiant, le graphe de C.

4. Est-il possible de trouver une représentation paramétrique de C ? Expliquer analytiquement le pourquoi de votre réponse.

Exercice 17.

On considère l'équation :

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y + k = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Identifier la courbe C correspondant à cette équation par l'étude de son comportement asymptotique.

2. En regroupant les termes dépendant de x, montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\alpha(ax + by + c)^2 + \beta(dy + e)^2 + \gamma = 0$$

et, par un changement d'axes obliques, retrouver le résultat de **1.**. Quelle condition doit remplir k pour qu'il existe des (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$ et satisfaisant à (E).

3. On admet satisfaite la condition de la question précédente, et on recherche les points de C dont la distance à l'origine est extrémale. En utilisant un multiplicateur de Lagrange λ, écrire les équations du problème.

4. À quelle équation du quatrième degré doit satisfaire λ ?

5. La transformation classique $\lambda = x + h$ permet d'éliminer le coefficient du terme du troisième degré en x. En posant $h = -3/4$, on trouve :

$$w(x) \equiv 16(k-1)x^4 - 2(5k-6)x^2 - x + \frac{5(5k-3)}{16} = 0$$

Montrer que cette équation admet au moins une solution réelle.
(Indication : considérer la fonction :

$$w(x) = 16(k-1)x^4 - 2(5k-6)x^2 - x + \frac{5(5k-3)}{16} = 0$$

puis, poser $k = 1-\mu^2$ pour se mettre dans les conditions de la question **2.**, puis regrouper les termes en μ^2,...)
Que peut-on en déduire sur les solutions du problème initial ?

Exercice 18.

a et b étant deux nonbres réels strictement positifs, on considère la courbe définie par l'équation :

$$f(x,y) = y^4 - x^4 - a^2y^2 + b^2x^2 = 0$$

1. Quelles sont ses symétries et ses asymptotes ?

2. Suivant les valeurs relatives des paramètres a et b, calculer son ou ses points singuliers, et dans le cas général, les valeurs des tangentes à l'origine.

3. Dans le cas où il y a plus d'un point singulier, tracer la courbe représentative de f.

Exercice 19.

On considère la courbe définie par l'équation :

$$f(x,y) = xy(y-x+2) + x - 4y = 0$$

1. Quelles sont ses asymptotes ? On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

2. Quels sont ses points singuliers et les valeurs des tangentes en ces points ?

3. Après avoir déterminé les points à tangente horizontale, reporter sur un graphique les résultats précédemment obtenus.

4. Pour préciser la forme de la courbe, on utilise la méthode des régions : pour cela, on écrira l'équation initiale sous la forme :

$$y(xy + 2x - 4) = x(xy - 1)$$

puis on tracera sur un nouveau graphique les régions définies par l'équation précédente, ainsi que les domaines correspondants o— la courbe est suceptible de se trouver.

5. En déduire sur un troisième graphique le tracé de la courbe initiale.

6. Trouver une paramétrisation de cette dernière.

Exercice 20.

Le but de cet exercice est d'utiliser le théorème des fonctions implicites pour faire l'étude du comportement d'une courbe dans le voisinage de l'un de ses points. Pour simplifier les calculs, et comme il est toujours possible de se ramener à ce cas, ce point sera l'origine du système de coordonnées.

1. On considère la courbe d'équation

$$f(x, y) = y - x + (y + x)(y - 2x) + y^3$$

1.a. Montrer que l'origine est un point régulier de cette courbe.

1.b. Expliquer pourquoi l'équation ci-dessus permet de définir implicitement y comme une fonction de x admettant à l'origine un développement limité d'ordre 2 :

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

1.c. Calculer les coefficients de ce développement.

1.d. En déduire le comportement de la courbe dans un voisinage de l'origine.

2. Soit ensuite la courbe définie par :

$$f(x, y) = y - x + (y - x)(y - 2x) + y^3 = 0$$

2.a. Montrer que cette équation définit implicitement y comme une fonction $\varphi(x)$ dans un voisinage de l'origine et que cette fonction admet un développement limité à l'ordre 3 :

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$

2.b. Calculer les coefficients du développement précédent.

2.c. En déduire l'allure de la courbe dans un voisinage de l'origine.

3. On étudie enfin le comportement dans un voisinage de l'origine de la courbe définie par :

$$f(x, y) = x(y + x) + 2x^3 + x^4 + y^4$$

3.a. En posant $x = \rho \cos \alpha$ et $y = \rho \sin \alpha$, montrer que l'origine est un point singulier de cette courbe. En déduire l'ordre de ce point singulier, le nombre de ses branches et la direction des tangentes à l'origine en chacune de ses branches.

3.b. On considère la branche qui a pour pente -1 à l'origine et on veut étudier ce qu'il se passe lorsqu'on fait varier la pente dans un voisinage de cette valeur. Pour cela, on cherche une paramétrisation de y en fonction de x en posant

$$y = p\,x$$

où p est une certaine fonction de x prenant la valeur -1 pour $x = 0$.

Montrer que p satisfait à la relation

$$g(p, x) \equiv p + 1 + 2x + x^2(1 + p^4)$$

3.c. Montrer que $g(p, x)$ permet de définir implicitement p en fonction de x dans un voisinage de $x = 0$, $p = -1$.

3.d. Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 2 de la fonction précédente et le calculer explicitement.

3.e. En déduire une paramétrisation locale en fonction de x de la branche correspondante de la courbe et le comportement de cette dernière dans un voisinage de l'origine.

3.f. On étudie maintenant le comportement de l'autre branche en suivant la même méthode, mais, puisque la tangente à l'origine est verticale, en recherchant un développement limité de x en fonction de y

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + o(y^2) \quad \text{ou plutôt} \quad x = y^\alpha(b_\alpha + b_{\alpha+1} + \cdots)$$

puisque le premier terme (au moins) du développement est nul.

Il est alors plus pratique d'introduire une fonction b de y telle que

$$x = y^\alpha b(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y \to 0} b(y) = b_\alpha$$

En admettant que $\alpha = 3$, calculer b_3 et en déduire le comportement de cette branche de courbe dans un voisinage de l'origine.

3.g. Expliquer pourquoi, dans la question précédente, 3 a été choisi pour valeur de α.

Exercice 21.

On considère dans un système d'axes rectangulaires la courbe (C) définie implicitement par l'équation

$$f(x, y) = (x - 1)^2 y^4 + (x - 1)y^3 - x^2 = 0$$

1. Cette courbe passe par l'origine et par le point de coordonnées $(0, 1)$. Calculer la pente de la tangente en ce dernier point.

2. Montrer que (C) possède une asymptote verticale.

3. Étudier les asymptotes horizontales de (C) et la position de la courbe par rapport à ces dernières lors que x tend vers $\pm\infty$.

4. Donner les coordonnées, s'ils existent, des points où la courbe coupe ses asymptotes horizontales, puis porter les résultat obtenus sur un même graphique.

5. Montrer que la courbe (C) n'admet qu'un seul point singulier et le déterminer.

6. On dit qu'une courbe $y = \varphi(x)$ a le même comportement que la courbe $f(x, y) = 0$ dans le voisinage de $x = a$, s'il existe un nombre réel α positif tel que

$$f\left(x, \varphi(x)\right) = \mathcal{O}\left(|x - a|^\alpha\right)$$

Trouver le développement limité de la courbe (C) dans un voisinage de l'origine. En déduire que $y^3 = -x^2$ se comporte comme (C) dans un voisinage de l'origine et tracer le graphe de (C) dans le même voisinage.

7. On cherche maintenant à étudier le comportement de la courbe au voisinage $x = 1$.

7.a. Montrer que si l'on suppose que ce comportement est de la forme

$$y = \frac{a}{(x-1)^\alpha}$$

on doit satisfaire à la relation.

$$a^4(x-1)^2 + a^3(x-1)^{\alpha+1} - x^2(x-1)^{4\alpha} = 0$$

7.b. Montrer qu'il n'est pas possible que les trois termes de l'équation ci-dessus soient du même ordre en $(x - 1)$.

7.c. Montrer que, par contre, il existe deux valeurs de α distinctes telles que, dans l'expression ci-dessus, deux des termes soient du même ordre <u>et</u> qu'ils soient d'ordre le plus bas possible. À chacune de ces valeurs de α correspond un comportement de la courbe ; calculer les valeurs de a correspondantes et en déduire le comportement de la courbe.

8. On admettra qu'il n'y a qu'un point de la courbe dont la tangente est horizontale. Il se trouve dans la région comprise entre les droites $x = 0$, $x = -1$, $y = 1$, $y = 0$.

8.a. Reporter sur un même graphique toutes les informations sûres obtenus jusqu'ici.

8.b. Sur un <u>autre</u> graphique, interpoler les renseignements précédents pour proposer le graphe de (C).

CAHIERS D'ENSEIGNEMENT

Du même auteur et dans la même collection

FASCICULE I – Systèmes linéaires. Une introduction à l'algèbre linéaire.

FASCICULE II – (TAP 1) Présentation du cours.

FASCICULE III – (TAP 2) Analyse numérique et Ordinateurs.

FASCICULE IV – (TAP 3) Extrema et Différentielles.

FASCICULE V – (TAP 4) Calcul des variations.

FASCICULE VI – (TAP 5) Formes quadratiques et Opérateurs associés.

FASCICULE VII – (TAP 6) Principes variationnels pour des systèmes de dimension finie.

FASCICULE VIII – (TAP 7) Méthodes 1.

FASCICULE IX – (TAP 8) Méthodes 2.

FASCICULE X – Étude et tracé des courbes du type $f(x, y) = 0$.